Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
15.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 52 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_A y^2 \, \mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \le y^2 + z^2 \le |x|\right\}$,

b) $\int_B xyz \, \mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\, x^2 + y^2 \le 1\right\}$,

c) $\int_0^1 \int_y^1 \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Lösungsvorschlag

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \le |x| \Leftrightarrow |x| \le 1$. Deshalb folgt mit dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\int_A y^2 \, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{-1}^1 \int_{A_x} y^2 \, \mathrm{d}(y,z) \, \mathrm{d}x$$

mit

$$A_x = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y^2 + z^2 \le |x|\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für y,z liefert

$$\int_{A_x} y^2 \, \mathrm{d}yz = \int_0^{2\pi} \int_{|x|}^{\sqrt{|x|}} r^2 \sin^2(\varphi) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \pi \frac{1}{4} \left[r^4\right]_{r=|x|}^{r=\sqrt{|x|}} = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - x^4\right)$$

für alle $x \in [-1,1]$. Da nun im Integranden nur gerade Potenzen von x vorkommen, folgt:

$$\int_A y^2 \, \mathrm{d}(x,y,z) = 2\int_0^1 \frac{\pi}{4}\left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{15}$$

b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_B xyz \, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\cos(\varphi) r \sin(\varphi) z r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 z \, \mathrm{d}z \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\sin(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot \frac{1}{4} = 0
\end{aligned}$$

c) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{x^2}\mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,0\le y\le x\le 1\}}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\mathrm{e}-1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 53 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Ändern Sie bei **c)** zunächst die Integrationsreihenfolge.

a) $\int_A x^2yz\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 2\right\}$,

b) $\int_B z(x^3+xy^2)\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le \pi,\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ |\frac{y}{x}|\le 1\right\}$,

c) $\int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3)

$$\int_A x^2yz\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^2 z\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[z^2\right]_{z=0}^{z=2}\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) = 2\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y)$$

mit

$$A' = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 1\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für x,y liefert:

$$\begin{aligned}\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^2\cos^2(\varphi)r\sin(\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\cos^3(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\int_A x^2yz\,\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{2}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_B z(x^3+xy^2)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^\pi z\int_1^2 r^3\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{31}{5}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) = 0\end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}
C &:= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\, y\le x\le y^2+1\Big\}\\
&= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ((0\le x\le 1)\vee(1<x\leqslant 2))\wedge(0\le y\le 1)\wedge(y\le x\le y^2+1)\Big\}\\
&= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ((0\le y\le x\le 1)\vee((1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1))\Big\}\\
&= \underbrace{\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\le 1\Big\}}_{=C_1}\cup\underbrace{\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1)\Big\}}_{=C_2}
\end{aligned}$$

Ferner ist $C_1\cap C_2=\emptyset$. Es folgt mit dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_C x^2y\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{C_1} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) + \int_{C_2} x^2y\,\mathrm{d}(x,y)\\
&= \int_0^1\int_0^x x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2\int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4}{2}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2\frac{1-(x-1)}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{10} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{10}+\frac{8}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-2 = \frac{67}{120}
\end{aligned}$$

Alternativ lässt sich das Integral auch direkt berechnen, ohne die Integrationsreihenfolge umzudrehen.

Aufgabe 54 (Übung)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \sin(z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei $A=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\ge 0,\ x+y+2z\le 1\Big\}$,

b) Sei $B:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\|\leqslant 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & ,0\leqslant\|(x,y,z)\|\leqslant 1,\\ 2 & ,1<\|(x,y,z)\|\leqslant 2.\end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\int_B \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}
\int_A \sin(z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\frac{1-x-y}{2}} \sin(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\int_0^1\int_0^{1-x} [\cos(z)]_{z=0}^{z=\frac{1-x-y}{2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} 1-\cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)+2\left[\sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 (1-x)-2\sin\left(\frac{1-x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-4\left[\cos\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{7}{2}+4\cos\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

b) Definiere $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ und $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 2\}$. Dann gilt $B = K \cup S$ und $K \cap S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Anhand von Kugelkoordinaten sieht man sofort, dass

$$\int_{K\cap S} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = 0,$$

womit nach Satz 20.5 folgt, dass

$$\begin{aligned}\int_B \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) + \int_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)\\ &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{1+r^2}\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r + \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\\ &= 4\pi\int_0^1 1 - \frac{1}{1+r^2}\,\mathrm{d}r + \frac{56}{3}\pi = 4\pi[r-\arctan(r)]_{r=0}^1 + \frac{56}{3}\pi\\ &= 4\pi - \pi^2 + \frac{56}{3}\pi = \frac{68}{3}\pi - \pi^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 55 (Tutorium)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (x^2+y^2)^2 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\, x^2+y^2 \le (1-z)^2\right\}$,

b) Bestimmen Sie für $a,b,c > 0$ das Volumen des Ellipsoids

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\}.$$

Lösungsvorschlag

a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_A (x^2+y^2)^2 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} r^4 \mathrm{e}^{2(1-z)^7} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\\ &= 2\pi \int_0^1 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}\left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1-z}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}(1-z)^6\,\mathrm{d}z\\ &\overset{x=1-z}{=} \frac{\pi}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x^7}x^6\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{14}\cdot\left[\mathrm{e}^{2x^7}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{42}(\mathrm{e}^2-1)\end{aligned}$$

b) Wir benutzen die Substitutionsregel mit der Funktion

$$g(u,v,w) = (au,bv,cw) \qquad \forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

Diese Funktion ist offensichtlich injektiv und stetig differenzierbar mit

$$g'(u,v,w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix},$$

also $\det g'(u,v,w) = abc > 0$. Mit $K := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1\}$ gilt $g(K) = E$, denn

$$(u,v,w) \in K \Leftrightarrow \left(\frac{au}{u}\right)^2 + \left(\frac{bv}{v}\right)^2 + \left(\frac{cw}{w}\right)^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow (au, bv, cw) = g(u,v,w) \in E.$$

Daher liefert die Substitutionsregel

$$|E| = \int_E 1 \, \mathrm{d}(x,y,z) = abc \int_K 1 \, \mathrm{d}(x,y,z) = abc|K|.$$

Das Volumen von K erhalten wir über die Verwendung von Kugelkoordinaten.

$$|K| = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\vartheta) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3},$$

womit $|E| = \frac{4\pi}{3} abc$ folgt.

Aufgabe 56 (Übung)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \mathrm{e}^{\frac{x+y}{x-y}} \, \mathrm{d}(x,y),$$

wobei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ und $(0,-1)$ ist.

Lösungsvorschlag

Wir definieren $g(u,v) = (\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v))$, da mit $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{x-y}}$ dann $f(g(u,v)) = \mathrm{e}^{\frac{u}{v}}$. Ist

$$B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant v \leqslant 2, -v \leqslant u \leqslant v\},$$

so gilt wegen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \leqslant 0, x - y \in [1,2]\},$$

dass $g(B) = A$. Ist $(u,v) \in B$, so folgt $u + v \geqslant -v + v = 0$ und $u - v \leqslant v - v = 0$ sowie $\frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v) = v \in [1,2]$, also $g(u,v) \in A$. Ist $(x,y) \in A$, so gilt $(x+y, x-y) \in B$ und $g(x+y, x-y) = (x,y)$. Außerdem ist g injektiv, denn aus $(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)) = (\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v}), \frac{1}{2}(\tilde{u}-\tilde{v}))$ folgt durch addieren bzw. subtrahieren der beiden Gleichungen sofort $u = \tilde{u}$ und $v = \tilde{v}$. Die Substitutionsregel liefert wegen

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

also $\det g'(u,v) = -\frac{1}{2}$, dass

$$\begin{aligned} \int_A \mathrm{e}^{\frac{x+y}{x-y}} \, \mathrm{d}(x,y) &= \frac{1}{2} \int_B \mathrm{e}^{\frac{u}{v}} \, \mathrm{d}(u,v) = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^{v} \mathrm{e}^{\frac{u}{v}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int_1^2 [v\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}]_{u=-v}^{v} \, \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 v(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}) \, \mathrm{d}v = \frac{3}{4}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}). \end{aligned}$$

Aufgabe 57 (Tutorium)

Es bezeichne $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aller $(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-4x}$ für $x \geqslant 0$ bzw. $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4+4x}$ für $x < 0$.

a) Sei $B = [0,1]^2$ und $g : Q \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Zeigen Sie, dass $g(B) = A$.

b) Berechnen Sie mit das Integral $\int_A y d(x,y)$.

Lösungsvorschlag

a) Indem man die Gleichungen $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-4x}$ und $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4+4x}$ nach x auflöst, sieht man, dass A von den Parabeln $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ und $x = \frac{y^2}{4} - 1$ (für $0 \leqslant 2 \leqslant y$ sowie dem Segment von $(-1,0)$ nach $(1,0)$ berandet wird.

Ist $(u,v) \in B$, so gilt $2uv \in [0,2]$ sowie $1 - \frac{(2uv)^2}{4} = 1 - u^2v^2 \geqslant |u^2 - v^2|$ (für $u \geqslant v$ wegen $(1+v^2)(1-u^2) \geqslant 0$, für $u < v$ wegen $(1-v^2)(1+u^2) \geqslant 0$). Deshalb gilt $g(u,v) \in A$. Ist $(x,y) \in A$ mit $y \neq 0$, so gilt

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)}}, \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right) \in B.$$

Dass beide Komponenten positiv sind, ist klar. Zudem gilt

$$\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)}} \leqslant 1 &\Leftrightarrow y^2 + 2x \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} \\ &\Leftarrow y^2 \leqslant 4 - 4x,\end{aligned}$$

was erfüllt ist. Schließlich gilt ebenso

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}} \leqslant 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2 + x \\ &\Leftarrow y^2 \leqslant 4 + 4x,\end{aligned}$$

was ebenfalls erfüllt ist. Wegen $g\left(\frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)}}, \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right) = (x,y)$ haben wir ein Urbild von (x,y) in B gefunden. Für $(x,y) \in A$ mit $y = 0$ ist das gesuchte Urbild entweder $(\sqrt{x}, 0)$ (für $x \geqslant 0$) oder $(0, \sqrt{-x})$ (für $x < 0$), die beide ebenfalls wieder in B liegen.

Da man beim Finden des Urbildes oben bemerkt, dass die gegebenen Kandidaten die einzig möglichen sind, ist die Injektivität von g ebenfalls gezeigt.

b) Wir berechnen

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix},$$

womit $\det g'(u,v) = 4(u^2+v^2) > 0$ für alle $(u,v) \in B \setminus \{(0,0)\}$. Die Substitutionsregel liefert nun

$$\begin{aligned}\int_A y \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_B 2uv \cdot 4(u^2+v^2)\,\mathrm{d}(u,v) = 8\int_0^1 \int_0^1 u^3v + uv^3 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= 8\int_0^1 \left[\frac{u^4v}{4} + \frac{u^2v^3}{2}\right]_{u=0}^1 \mathrm{d}v = \int_0^1 2v + 4v^3 \,\mathrm{d}v = [v^2+v^4]_{v=0}^1 = 2\end{aligned}$$