Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
22.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 58 (Übung)

Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationstoruses

$$\mathbb{T}_r^R = \{((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi), (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi), r\sin(\vartheta)) : \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)\}.$$

Aufgabe 59 (Tutorium)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$\mathcal{F} = \{(x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 \leqslant \frac{r^2}{4}\}$$

b) Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial D} f(x,y) \cdot \,\mathrm{d}(x,y)$$

(i) direkt und

(ii) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 60 (Übung)

Es sei Γ eine positiv orientierte Parameterisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ mit der Ebene $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\right\}$ entsteht. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_{\Gamma} (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \,\mathrm{d}(x,y,z)$$

a) direkt und

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 61 (Tutorium)

Es sei $\mathcal{F}_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z > 0\right\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) = (1, xz, xy)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}_0} f \cdot \mathrm{d}o$$

a) direkt und

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 62 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, das Erfüllen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, relle bzw. komplexe Differenzierbarkeit sowie Holomorphie. Geben Sie, dort wo sie existiert, die Ableitung f' an.

(i) $f(z) = z \operatorname{Re} z$, (ii) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf $\mathbb{C}$, so ist f konstant auf $\mathbb{C}$.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass aus $(\operatorname{Re} f)' \equiv 0$ bzw. $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$ folgt, dass $\operatorname{Re} f$ bzw. $\operatorname{Im} f$ konstant auf $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 63 (Tutorium)

a) Sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $(\operatorname{Im} f)(z) = \cos(x)\sinh(y)$ für $z = x + \mathrm{i}y$ und $f(0) = 0$. Bestimmen Sie $\operatorname{Re} f$. Betrachten Sie die Funktionswerte von f auf der reellen Achse, um eine Vermutung über den Ursprung dieser Funktion anzustellen.

b) Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

(i) $\int_\gamma z \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z$, wobei γ der Weg von 0 nach $1+\mathrm{i}$ auf der Parabel $\{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$ ist,

(ii) $\int_\gamma |z|^2 \,\mathrm{d}z$, wobei γ den Rand des Dreiecks mit Eckpunkten 0,1 und i ein Mal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft,

(iii) $\int_\gamma \overline{z}^2 \,\mathrm{d}z$, wobei $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\sin(t)$ für $t \in [0,T]$ mit $T > 0$ so, dass $\mathrm{L}(\gamma) = \pi/2$.

Erinnerung: Die **Übungsklausur** findet am **04.07.2015** von **9 bis 11 Uhr** im **Benz-Hörsaal** statt. Ist ein Schein erforderlich, so melden Sie sich bitte bis zum 02.07.2015 bei Frau Dr. Nagato-Plum (Zimmer 2.029) an, ansonsten wird keine Anmeldung benötigt.