Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
29.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 64 (Übung)

a) Beweisen Sie das Lemma von Jordan: Ist f stetig auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0\}$ für ein $R_0 > 0$ sowie entweder

(i) $\alpha > 0$ und $\lim_{R\to\infty} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| = 0$, oder

(ii) $\alpha = 0$ und $\lim_{R\to\infty} R \cdot \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| = 0$,

so gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z} \, \mathrm{d}z = 0, \quad \gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi].$$

b) Zeigen Sie: Ist g differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie stetig in $U_r(z_0)$ für ein $r > 0$, dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi g(z_0), \quad \gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi].$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\mathrm{i}\pi = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$.

Aufgabe 65 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale (es gilt jeweils $t \in [0, 2\pi]$).

a) $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos(z)} \sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}} \, \mathrm{d}z, \quad \gamma(t) = 2 + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,

b) $\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z} \, \mathrm{d}z, \quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,

c) $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^2 + 3z} \, \mathrm{d}z, \quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,

d) $\int_\gamma \frac{z^3}{z^2+1} \, \mathrm{d}z, \quad \gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,

e) $\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8} \, \mathrm{d}z, \quad \gamma(t) = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$,

f) $\int_\gamma \frac{\exp(\mathrm{i}z^2)}{(z - \sqrt{\pi/2})^3} \, \mathrm{d}z, \quad \gamma(t) = 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,

Aufgabe 66 (Übung)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe der bisher verfügbaren Techniken der Funktionentheorie zu berechnen. Hierfür seien für $R, \varepsilon > 0$ die folgenden Wege definiert.

$$\gamma_{1,\varepsilon,R}(t) = t, \ t \in [\varepsilon, R], \qquad \gamma_{2,R}(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \ t \in [0, \pi],$$

$$\gamma_{3,\varepsilon,R}(t) = t, \ t \in [-R, -\varepsilon], \qquad \gamma_{4,\varepsilon}(t) = \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \ t \in [0, \pi].$$

Betrachten Sie nun die Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ und finden Sie anhand obiger Wege einen Weg, für den Sie den Cauchyschen Integralsatz anwenden können. Führen Sie dann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$ unter Zuhilfenahme von **Aufgabe 64** durch.

Aufgabe 67 (Tutorium)

Wir möchten die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Seien dazu für $R > 0$ die drei Wege

$$\gamma_{1,R}(t) = t, \qquad \gamma_{2,R}(t) = R + \mathrm{i}t, \qquad \gamma_{3,R}(t) = t(\mathrm{i}+1),$$

gegeben, jeweils mit $0 \leqslant t \leqslant R$.

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen, dass

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der Fresnel-Integrale, indem Sie in **a)** den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und dabei $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ verwenden.

Aufgabe 68 (Übung)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\,\mathrm{d}z$$

mit $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, wobei $r > 0$ beliebig gewählt sei, sodass das Integral wohldefiniert ist.

b) Sei $f \in H(\mathbb{C})$ nicht konstant. Zeigen Sie, dass zu $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ existiert mit $f(z_n) \to a$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 69 (Tutorium)

a) Beweisen Sie: Ist $f \in H(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Re} f(z) \leqslant M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert genau eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ mit

(i) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^4} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

(ii) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{|k|^5} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

(iii) $f(k) = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$,

(iv) $f\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \left(4 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.