Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
29.06.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 64 (Übung)

a) Beweisen Sie das Lemma von Jordan: Ist f stetig auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0\}$ für ein $R_0 > 0$ sowie entweder

(i) $\alpha > 0$ und $\lim_{R\to\infty} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| = 0$, oder

(ii) $\alpha = 0$ und $\lim_{R\to\infty} R \cdot \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| = 0$,

so gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} \, dz = 0, \quad \gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi].$$

b) Zeigen Sie: Ist g differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie stetig in $U_r(z_0)$ für ein $r > 0$, dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} \, dz = i\pi g(z_0), \quad \gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}, t \in [0, \pi].$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $i\pi = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z-z_0} \, dz$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Für $R \geqslant R_0$ gilt

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} \, dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{it}) e^{i\alpha R(\cos(t) + i\sin(t))} \cdot iRe^{it} \, dt \right|$$
$$\leqslant R \int_0^\pi |f(Re^{it})| e^{-R\alpha \sin(t)} \, dt \leqslant R \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| \int_0^\pi e^{-R\alpha \sin(t)} \, dt$$

Nun nutzen wir zuerst die Symmetrie der Sinusfunktion aus, um

$$\int_0^\pi e^{-R\alpha \sin(t)} \, dt = \int_0^{\pi/2} e^{-R\alpha \sin(t)} \, dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{-R\alpha \sin(t)} \, dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} e^{-R\alpha \sin(t)} \, dt - \int_{\pi/2}^0 e^{-R\alpha \sin(\pi - s)} \, ds = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\alpha \sin(t)} \, dt$$

zu erhalten. Auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ gilt $\sin(t) \geqslant 2t/\pi$, da der Sinus hier konkav ist. Insgesamt folgt also wegen der Monotonie der Exponentialfunktion, dass

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} \, dz \right| \leqslant 2R \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{\frac{-2R\alpha}{\pi} \cdot t} \, dt$$
$$= \frac{\pi}{\alpha}(1 - e^{-R\alpha}) \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| \leqslant \frac{\pi}{\alpha} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| \to 0 \quad (R \to \infty).$$

(ii) Mit $\alpha = 0$ folgt für $R \geqslant R_0$ sofort

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) \, dz \right| \leqslant L(\gamma_R) \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| = \pi R \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geqslant 0} |f(z)| \to 0 \quad (R \to \infty).$$

b) Wir stellen zuerst fest, dass

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} \, dz = \int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} \, dt = i\pi.$$

Damit gilt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} \, dz - i\pi g(z_0) = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \, dz.$$

Da g differenzierbar in z_0 und stetig auf $U_r(z_0)$ ist, ist

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0, \\ g'(z_0), & z = z_0, \end{cases}$$

auf dieser Umgebung stetig und damit auf $\overline{U_{r/2}(z_0)}$ beschränkt. Für $\varepsilon \leqslant r/2$ gilt also

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} \, dz - \pi i g(z_0) \right| = \left| \int_{\gamma_\varepsilon} h(z) \, dz \right| \leqslant L(\gamma_\varepsilon) \max_{|z| \leqslant \frac{r}{2}} |h(z)| = \pi\varepsilon \max_{|z| \leqslant \frac{r}{2}} |h(z)| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Aufgabe 65 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale (es gilt jeweils $t \in [0, 2\pi]$).

a) $\int_\gamma \frac{e^{i\cos(z)} \sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}} \, dz, \quad \gamma(t) = 2 + 3e^{it},$

b) $\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z} \, dz, \quad \gamma(t) = e^{it},$

c) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+3z} \, dz, \quad \gamma(t) = e^{it},$

d) $\int_\gamma \frac{z^3}{z^2+1} \, dz, \quad \gamma(t) = 2e^{it},$

e) $\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8} \, dz, \quad \gamma(t) = 3e^{-it},$

f) $\int_\gamma \frac{\exp(iz^2)}{(z-\sqrt{\pi/2})^3} \, dz, \quad \gamma(t) = 2 + e^{it},$

Lösungsvorschlag

Für die Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes (CIS) und der Cauchyschen Integralformel (CIF) bemerken wir zuerst, dass offene Kugeln in $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend sind und dass alle auftretenden Wege außer in **e)** positiv orientierte Kreise (einfach durchlaufen, geschlossen) sind.

a) Die Funktion

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos(z)}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}}$$

ist holomorph in $G = U_4(2)$ als Verkettung holomorpher Funktionen und wegen $(z-7)^{42} \neq 0$ auf G. Somit folgt aus dem CIS, dass

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos(z)}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}}\,\mathrm{d}z = 0.$$

b) Die Funktion $f(z) = \cos(\pi z)$ ist holomorph in $G = \mathbb{C}$. Da 0 im Inneren des Kreises liegt, folgt aus der CIF, dass

$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot f(0) = 2\pi\mathrm{i}.$$

c) Die Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z+3}$ ist holomorph in $G = U_2(0)$. Da 0 im Inneren des Kreises liegt, folgt aus der CIF, dass

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+3z}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot f(0) = \frac{2}{3}\pi\mathrm{i}.$$

d) Wir beginnen mit einer Partialbruchzerlegung. Für $z \neq \pm\mathrm{i}$ gilt

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} \overset{!}{=} \frac{A}{z+\mathrm{i}} + \frac{B}{z-\mathrm{i}}$$

für gewisse $A, B \in \mathbb{C}$. Multiplizieren mit z^2+1 liefert

$$1 = (A+B)z + \mathrm{i}(B-A).$$

Da somit $(A+B)z$ für alle $z \neq \pm\mathrm{i}$ der konstanten Funktion $1 - \mathrm{i}(B-A)$ entsprechen muss, folgern wir $A = -B$ und deshalb $A = \mathrm{i}/2$, $B = -\mathrm{i}/2$. Da die Funktion $f(z) = z^3$ holomorph in $G = \mathbb{C}$ ist, folgt mit Hilfe der Partialbruchzerlegung, der CIF und der Tatsache, dass $\pm\mathrm{i}$ im Inneren des Kreises liegt, dass

$$\int_\gamma \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-(-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{i}}{2}2\pi\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})^3 - \frac{\mathrm{i}}{2}2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^3 = -2\pi\mathrm{i}.$$

e) Wir stellen zuerst fest, dass die Funktion $f(z) = \sin(\pi z)$ holomorph in $G = \mathbb{C}$ ist mit den Ableitungen

$$f^{(2k)}(z) = (-1)^k\pi^{2k}\sin(\pi z), \qquad f^{(2k+1)}(z) = (-1)^k\pi^{2k+1}\cos(\pi z),$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Zudem wird der Rand des Kreises ein Mal im Uhrzeigersinn durchlaufen. Definieren wir die positiv orientierte Variante des Weges mit

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2\pi - t) = \gamma(-t) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

für $t \in [0, 2\pi]$, so sehen wir, dass wegen $\gamma'(2\pi - t) = -\tilde{\gamma}'(t)$

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\pi\gamma(t))}{(\gamma(t)-2)^8}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \overset{s=2\pi-t}{=} -\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\pi\tilde{\gamma}(s))}{(\tilde{\gamma}(s)-2)^8}(-\tilde{\gamma}'(s))(-1)\,\mathrm{d}s = -\int_{\tilde{\gamma}} \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8}\,\mathrm{d}z$$

Der Punkt $z_0 = 2$ liegt innerhalb dieses Kreises, weshalb aus der CIF für Ableitungen folgt, dass

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8}\,\mathrm{d}z = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{7!} f^{(7)}(2) = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{7!}(-1)^3\pi^7\cos(2\pi) = \frac{2\pi^8\mathrm{i}}{7!}.$$

f) Wir merken an, dass die Funktion $f(z) = \exp(\mathrm{i}z^2)$ holomorph in $G = \mathbb{C}$ ist und für die ersten beiden Ableitungen gilt, dass

$$f'(z) = 2\mathrm{i}z\exp(\mathrm{i}z^2), \qquad f''(z) = 2\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}z^2) - 4z^2\exp(\mathrm{i}z^2).$$

Da $z_0 = \sqrt{\pi/2}$ innerhalb dieses Kreises liegt (es gilt $1 < z_0 < 2$), folgt mit der CIF für Ableitungen, dass

$$\int_\gamma \frac{\exp(\mathrm{i}z^2)}{(z-\sqrt{\pi/2})^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!} f''(\sqrt{\pi/2})\,\mathrm{ind}_\gamma(\sqrt{\pi/2}) = \pi\mathrm{i}(-2-2\pi\mathrm{i}) = 2\pi(\pi-\mathrm{i}).$$

Aufgabe 66 (Übung)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Hierfür seien für $R, \varepsilon > 0$ die folgenden Wege definiert.

$$\gamma_{1,\varepsilon,R}(t) = t,\ t \in [\varepsilon, R], \qquad \gamma_{2,R}(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [0,\pi],$$
$$\gamma_{3,\varepsilon,R}(t) = t,\ t \in [-R,-\varepsilon], \qquad \gamma_{4,\varepsilon}(t) = \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [0,\pi].$$

Betrachten Sie nun die Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ und finden Sie anhand obiger Wege einen Weg, für den Sie den Cauchyschen Integralsatz anwenden können. Führen Sie dann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$ unter Zuhilfenahme von **Aufgabe 64** durch.

Lösungsvorschlag

Die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -\mathrm{i}y \text{ für } y \geqslant 0\}$$

ist einfach zusammenhängend. Auf dieser Menge ist f holomorph. Zudem ist $\gamma_{1,\varepsilon,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,\varepsilon,R} + (\gamma_{4,\varepsilon})_-$ ein geschlossener Weg in dieser Menge. Somit folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$0 = \int_{\gamma_{1,\varepsilon,R}+\gamma_{2,R}+\gamma_{3,\varepsilon,R}+(\gamma_{4,\varepsilon})_-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{3,\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

also

$$\int_{\gamma_{1,\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{3,\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für alle $\varepsilon, R > 0$. Betrachten wir die linke Seite dieser Gleichung, so erkennen wir, dass

$$\int_{\gamma_{1,\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{3,\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t} = \int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\int_\varepsilon^R \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Andererseits gilt

$$\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$$

für $R \to \infty$ unter Anwendung von **Aufgabe 64 a)** mit $\alpha = 1$ und der Funktion $1/z$, die die Voraussetzung von (i) erfüllt. Weiter erfüllt die Funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ die Voraussetzung von **Aufgabe 64 b)** mit $z_0 = 0$, weshalb

$$\int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z \to \mathrm{i}\pi$$

für $\varepsilon \to 0$. Ingesamt gilt damit

$$2\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leftarrow 2\mathrm{i}\int_\varepsilon^R \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z \to \mathrm{i}\pi$$

für $\varepsilon \to 0$ und $R \to \infty$, also

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 67 (Tutorium)

Wir möchten die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Seien dazu für $R > 0$ die drei Wege

$$\gamma_{1,R}(t) = t, \qquad \gamma_{2,R}(t) = R + \mathrm{i}t, \qquad \gamma_{3,R}(t) = t(\mathrm{i}+1),$$

gegeben, jeweils mit $0 \leqslant t \leqslant R$.

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen, dass

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der Fresnel-Integrale, indem Sie in **a)** den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und dabei $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ verwenden.

Lösungsvorschlag

a) Wir merken an, dass der Weg $\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + (\gamma_{3,R})_-$, definiert durch $(\gamma_{3,R})_-(t) = \gamma_{3,R}(R-t)$ für $0 \leqslant t \leqslant R$, den Rand des Dreiecks mit den Ecken 0,R und $(1+\mathrm{i})R$) im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Somit gilt mit dem Cauchyschen Integralsatz, den wir hier anwenden können, da

$f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist, dass

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{3,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{(\gamma_{3,R})_-} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\gamma} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = 0\end{aligned}$$

und deshalb

$$\int_{\gamma_{3,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^R \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}t)^2}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^R |\mathrm{e}^{t^2-R^2-2\mathrm{i}tR}|\,\mathrm{d}t = \int_0^R \mathrm{e}^{t^2-R^2}\,\mathrm{d}t \\ \leqslant \int_0^R \mathrm{e}^{Rt-R^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{Rt-R^2}}{R}\right]_{t=0}^R = \frac{1-\mathrm{e}^{-R^2}}{R} \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty,\end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache benutzt haben, dass $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, sowie die Monotonie der reellen Exponentialfunktion.

c) Zuerst bemerken wir, dass

$$\int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Zusammen mit **b)** und der Formel aus **a)** folgern wir, dass der Grenzwert von $\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z$ für $R \to \infty$ existiert, genauer sogar

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Andererseits berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^R \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t^2}(1+\mathrm{i})\,\mathrm{d}t \overset{s:=\sqrt{2}t}{=} \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s^2}\,\mathrm{d}s \\ = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}R} \cos(s^2) - \mathrm{i}\sin(s^2)\,\mathrm{d}s \to \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \cos(s^2) - \mathrm{i}\sin(s^2)\,\mathrm{d}s \quad \text{für } R \to \infty.\end{aligned}$$

Der letzte Grenzwert existiert, da wir bereits gesehen haben, dass der Grenzwert des ersten Integrals existiert. Zusammen folgt nun

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-\mathrm{i}).$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil beider Seiten liefert schließlich

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Aufgabe 68 (Übung)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\,\mathrm{d}z$$

mit $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, wobei $r > 0$ beliebig gewählt sei, sodass das Integral wohldefiniert ist.

b) Sei $f \in H(\mathbb{C})$ nicht konstant. Zeigen Sie, dass zu $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ existiert mit $f(z_n) \to a$ für $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag

a) Der Integrand ist für $z \notin \{\pm\mathrm{i}, -\frac{1}{2}\}$ wohldefiniert und dort auch holomorph, also insbesondere stetig. Damit ist das Integral für $r \notin \{\frac{1}{2}, 1\}$ definiert. Wir betrachten die drei Fälle getrennt.

$\underline{0 < r < \frac{1}{2}}$: Der Integrand ist holomorph auf und γ_r verläuft in der Menge $U_{\frac{1}{2}}(0)$. Da diese außerdem konvex ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\,\mathrm{d}z = 0, \quad 0 < r < \frac{1}{2}.$$

$\underline{\frac{1}{2} < r < 1}$: Die Funktion

$$f_1(z) := \frac{\sin(\pi z)}{z^2+1}$$

ist holomorph auf und γ_r verläuft innerhalb der Menge $U_1(0)$. Da γ_r einfach geschlossen und positiv orientiert ist, folgt aus der Cauchyschen Integralformel, dass

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{\gamma_r} \frac{f_1(z)}{z-(-1/2)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot f_1(-1/2) = -\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}, \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

$\underline{1 < r < \infty}$: Hier müssen wir eine Partialbruchzerlegung finden, um die Cauchysche Integralformel verwenden zu können. Wir suchen also Konstanten $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(2z+1)} \overset{!}{=} \frac{A}{z+\mathrm{i}} + \frac{B}{z-\mathrm{i}} + \frac{C}{2z+1}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm\mathrm{i}, -1/2\}.$$

Multiplizieren wir mit allen auftretenden Faktoren durch, so erhalten wir

$$1 \overset{!}{=} A(z-\mathrm{i})(2z+1) + B(z+\mathrm{i})(2z+1) + C(z^2+1).$$

Ist diese Gleichheit für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm\mathrm{i}, -1/2\}$ erfüllt, so ist sie es wegen der Stetigkeit der Ausdrücke auch für $z \in \{\pm\mathrm{i}, -1/2\}$. Setzen wir diese drei Werte ein, so erhalten wir die

Gleichungen

$$\begin{aligned}
1 &\stackrel{!}{=} \frac{5}{4}C,\\
1 &\stackrel{!}{=} 2\mathrm{i}\cdot(2\mathrm{i}+1)\cdot B = (-4+2\mathrm{i})B,\\
1 &\stackrel{!}{=} (-2\mathrm{i})\cdot(-2\mathrm{i}+1)\cdot A = (-4-2\mathrm{i})A,
\end{aligned}$$

und mit der Rechenregel $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (vgl. Aufgabe 1a)(ii)) ergibt sich schließlich $A = -\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\mathrm{i}, B = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\mathrm{i}, C = \frac{4}{5}$. Damit ergibt sich mit

$$f_2(z) := \sin(\pi z),$$

dass f_2 holomorph auf $\mathbb{C}$ ist und für $r > 1$ mit der Cauchyschen Integralformel (alle Umlaufzahlen sind 1)

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\,\mathrm{d}z &= \left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{i}\right)\int_{\gamma_r}\frac{f_2(z)}{z-(-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z + \left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\mathrm{i}\right)\int_{\gamma_r}\frac{f_2(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\\
&\quad + \frac{2}{5}\int_{\gamma_r}\frac{f_2(z)}{z-(-1/2)}\,\mathrm{d}z\\
&= \left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{i}\right)\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot f_2(-\mathrm{i}) + \left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\mathrm{i}\right)\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot f_2(\mathrm{i})\\
&\quad + \frac{2}{5}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot f_2(-1/2)\\
&= \frac{2}{5}\pi\sinh(\pi)\mathrm{i} - \frac{4}{5}\pi\mathrm{i} = \frac{2\pi}{5}(\sinh(\pi)-2)\cdot\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

b) Wir nehmen an, dass ein $a \in \mathbb{C}$ existiert, sodass für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt, dass $f(z_n) \not\to a$ für $n \to \infty$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(z) - a| \geqslant \varepsilon \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir z_n als das Element definieren, das diese Ungleichung für $\varepsilon = 1/n$ verletzt und hätten entgegen der Annahme eine entsprechende Folge gefunden. Somit ist die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph (da $f(z) - a \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$) und erfüllt $|h(z)| \leqslant \varepsilon^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Der Satz von Liouville liefert nun, dass h und somit auch $f = \frac{1}{h} + a$ konstant ist (h ist per Definition nicht die Nullfunktion).

Aufgabe 69 (Tutorium)

a) Beweisen Sie: Ist $f \in H(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Re} f(z) \leqslant M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert genau eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ mit

(i) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^4} \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

(ii) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{|k|^5} \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

(iii) $f(k) = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$,

(iv) $f\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \left(4 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag

a) Wir betrachten die ganze Funktion $g(z) := \mathrm{e}^{f(z)}$. Für Sie gilt

$$|g(z)| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} f(z)} \leqslant \mathrm{e}^{M},$$

womit g beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist g konstant und laut Definition nicht die Nullfunktion. Somit existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(f(z))}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im}(f(z))} = \mathrm{e}^{f(z)} = z_0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Wenden wir den Betrag auf die Gleichung an, ergibt sich

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(f(z))} = |z_0| \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

also $\operatorname{Re}(f(z)) = \log(|z_0|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, womit $\operatorname{Re}(f(z))$ konstant ist. Nach **Aufgabe 62 b)** ist somit f konstant.

b) (i) Die Aussage ist richtig. Durch die Funktion $f(z) = z^4$ ist eine solche Funktion gegeben. Sei g eine weitere Funktion, die die Voraussetzungen erfüllt. Dann gilt $g(1/n) = 1/n^4 = f(1/n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass f und g auf der Menge

$$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

mit Häufungspunkt 0 übereinstimmen. Nach dem Identitätssatz gilt $g \equiv f$, womit die Existenz genau einer Funktion gezeigt ist.

(ii) Die Aussage ist falsch. Wir nehmen an, eine solche Funktion f existiere. Die Funktion $g(z) = z^5$ ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und stimmt auf der Menge

$$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

mit f überein nach Voraussetzung. Der Identitätssatz liefert dann $f \equiv g$, was ein Widerspruch ist, da

$$g(-1/n) = -1/n^5 \neq 1/n^5 = f(1/n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Die Aussage ist falsch. Offensichtlich erfüllt die Funktion $f(z) = z^2$ alle Forderungen, aber wir können sie mit einer beliebigen ganzen Funktion g multiplizieren, die $g(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt, beispielsweise $g(z) = 1 + \sin(\pi z)$. Somit gibt es mehr als nur eine Funktion, die die Voraussetzungen erfüllt.

(iv) Die Aussage ist richtig. Schreiben wir die Forderung nach den Funktionswerten um, erhalten wir

$$\begin{aligned} f\left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) &= \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 3\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \\ &= 3\mathrm{e}^{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} + 2\mathrm{e}^{2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \mathrm{e}^{3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Eine Funktion in $H(\mathbb{C})$, die zusätzlich diese Forderung erfüllt, ist gegeben durch

$$f(z) = 3\mathrm{e}^{z} + 2\mathrm{e}^{2z} - \mathrm{e}^{3z}$$

Ist g eine weitere Funktion, die alle Forderungen erfüllt, so stimmt sie mit f auf der Menge

$$\left\{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$$

mit Häufungspunkt $\log(1) = 0$ überein, womit nach dem Identitätssatz wieder $g \equiv f$ gilt.