Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
06.07.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 70 (Übung)

a) Beweisen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und hat eine Funktion $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ in $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei g die holomorphe Fortsetzung der Funktion $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ ist.

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)(z-1)^2} \,\mathrm{d}z$$

für den Weg $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 71 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes, wobei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ für alle $r > 0$ durch $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gegeben ist.

a) $\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z - \pi} \,\mathrm{d}z,$

b) $\displaystyle\int_{\gamma_9} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2} \,\mathrm{d}z,$

c) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{\frac{z}{1-z}} \,\mathrm{d}z,$

d) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1} \,\mathrm{d}z.$

Aufgabe 72 (Übung)

a) (i) Seien P und Q Polynome über $\mathbb{R}$, wobei der Grad von Q um mindestens zwei größer sei als der Grad von P. Die Funktion $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ habe keinen Pol auf der reellen Achse. Beweisen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \,\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}(f, z).$$

(ii) Berechnen Sie nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} \,\mathrm{d}x.$$

b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf G, so ist f konstant auf G.

AUFGABE 73 (TUTORIUM)

a) Seien P und Q Polynome in zwei Variablen, $R := \frac{P}{Q}$ und die Funktion $t \mapsto R(\cos(t), \sin(t))$ sei stetig (fortsetzbar) auf $[0, 2\pi]$ (was z.B. der Fall ist, falls Q auf $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ nullstellenfrei ist). Sei außerdem

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k),$$

wobei $z_1, \dots, z_n$ die Pole von f in $U_1(0)$ seien.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1 + \cos(t)}\,\mathrm{d}t = \pi$$

AUFGABE 74 (ÜBUNG)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\mathrm{e}^{1/z} = w$ für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich viele Lösungen z mit $|z| \leqslant r$ für jedes $r > 0$ besitzt.

b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{U_1(0)} \subseteq G$. Beweisen Sie: Ist $f \in H(G)$ und $|f|$ konstant auf $\partial U_1(0)$, f jedoch nicht konstant auf G, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in $U_1(0)$.

c) Berechnen Sie alle Logarithmen von $\mathrm{i} - 1$ sowie alle zwölften Wurzeln von 1.

AUFGABE 75 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie jeweils das Maximum und Minimum des Betrages der folgenden Funktionen auf der Menge $\overline{U_1(0)}$.

a) $f_1(z) = \mathrm{e}^{z^2}$,

b) $f_2(z) = z^2 + \mathrm{i}z + 1$,

c) $f_3(z) = \frac{z+3}{z-3}$,

d) $f_4(z) = 3 - |z|^2$.