Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
06.07.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 70 (Übung)

a) Beweisen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und hat eine Funktion $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ in $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei g die holomorphe Fortsetzung der Funktion $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ ist.

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{(e^z - 1)(z-1)^2}\, dz$$

für den Weg $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Lösungsvorschlag

a) Hat die Funktion f in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so kann sie nach Satz 22.14 für $z \in \{0 < |z - z_0| < R\} \subseteq D$ in eine Laurentreihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickelt werden. Somit gilt für $z \in \{0 < |z - z_0| < R\}$, dass

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n,$$

was in z_0 holomorph fortgesetzt werden kann, und

$$\frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=m-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-(m-1))!} a_{n-m} (z - z_0)^{n-(m-1)}$$
$$\xrightarrow{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} (m-1)! \cdot a_{-1} = a_{-1} = \operatorname{res}(f, z_0)$$

nach Definition des Residuums.

b) In der offenen, einfach zusammenhängenden Menge $U_3(0)$ liegt sowohl der einfach geschlossene, positiv orientierte Weg γ als auch die beiden Singularitäten 0 und 1 von $f(z) = \frac{1}{(e^z-1)(z-1)^2}$, die ebenfalls von γ umschlossen werden. 1 ist per Definition ein Pol zweiter Ordnung von f, 0 ist wegen der Existenz von $\lim_{z\to 0} zf(z) \neq 0$ (siehe unten) ein Pol erster Ordnung, . Damit ist der Integrand, den wir f nennen wollen, holomorph in $U_3(0)\setminus\{0,1\}$ und nach **a)** gilt

$$\operatorname{res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z-0}{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^0} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(\mathrm{e}^\cdot)'(0)} \cdot \frac{1}{(0-1)^2} = 1$$

sowie

$$\operatorname{res}(f,1) = \lim_{z\to 1}((\cdot-1)^2 f(\cdot))'(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^\cdot - 1}\right)'(z) = \lim_{z\to 1} -\frac{\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z-1)^2} = -\frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}.$$

Nach dem Residuensatz gilt nun

$$\int_\gamma \frac{1}{(\mathrm{e}^z-1)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(1 - \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}\right)$$

Aufgabe 71 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes, wobei $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ für alle $r > 0$ durch $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gegeben ist.

a) $\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z,$

b) $\displaystyle\int_{\gamma_9} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z,$

c) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{\frac{z}{1-z}}\,\mathrm{d}z,$

d) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}\,\mathrm{d}z.$

Lösungsvorschlag

γ_r ist ein einfach geschlossener, positiv orientierter Weg für alle $r > 0$.

a) Der Integrand $f(z) = \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}$ besitzt eine einfache Polstelle bei $z_0 = \pi$. Diese liegt im Inneren des Integrationsweges. Der Residuensatz liefert

$$\int_{\gamma_4} \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}(f,z_0).$$

Das Residuum berechnet sich über

$$\operatorname{res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \pi e^{\mathrm{i}\pi} = -\pi.$$

Insgesamt ist also $\int_{\gamma_4} \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z = -2\mathrm{i}\pi^2$.

b) Der Integrand $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt einen Pol erster Ordnung bei $z_0 = 1$ und einen Pol zweiter Ordnung bei $z_1 = -3$. Da alle Polstellen im Inneren des Integrationsweges liegen, liefert der Residuensatz

$$\int_{\gamma_9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\operatorname{res}(g,z_0) + \operatorname{res}(g,z_1)).$$

Die Residuen berechnen sich nach **Aufgabe 70 a)** zu

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(g, z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z) = \frac{e}{16},\\ \operatorname{res}(g, z_1) &= \lim_{z\to z_1}((\cdot - z_1)^2 g(\cdot))'(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2} = -\frac{5e^{-3}}{16}\end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\int_{\gamma_9}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi\mathrm{i}}{8}(e-5e^{-3})$.

c) Wir berechnen die Laurententwicklung von $h(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$. Es gilt

$$h(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1+\frac{1}{1-z}} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Die isolierte Singularität bei $z_0 = 1$ liegt im Inneren des Integrationsweges. Der Residuensatz liefert

$$\int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}(h, z_0).$$

Das Residuum ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ in der Laurentreihe, also $\operatorname{res}(h, z_0) = -\frac{1}{e}$. Insgesamt ist also $\int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}}\,\mathrm{d}z = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{e}$.

d) Wegen

$$j(z) = \frac{z}{e^{\mathrm{i}z}-1} = \frac{z}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!}-1} = \frac{1}{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^{k-1}}{k!}}$$

für alle $z \in \mathbb{C}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, hat j eine hebbare Singularität bei $z_0 = 0$, die im Inneren des Integrationsweges liegt. Alle weiteren isolierten Singularitäten von j bei $z_k = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ liegen nicht im Inneren des Integrationsweges. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_{\gamma_1}\frac{z}{e^{\mathrm{i}z}-1}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Aufgabe 72 (Übung)

a) (i) Seien P und Q Polynome über $\mathbb{R}$, wobei der Grad von Q um mindestens zwei größer sei als der Grad von P. Die Funktion

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

habe keinen Pol auf der reellen Achse. Beweisen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{res}(f, z).$$

(ii) Berechnen Sie nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf G, so ist f konstant auf G.

Lösungsvorschlag

a) (i) Die Funktion $f|_{\mathbb{R}}$ ist stetig. Schreiben wir

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \qquad Q(z) = \sum_{n=0}^{N+2} b_n z^n,$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$ und $b_{N+2} \neq 0$ nach Voraussetzung, so können wir wir $x_0 > 1$ so wählen, dass für $|x| > x_0$

$$\Big|\sum_{n=1}^{N+2} b_{N+2-n} x^{-n}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{N+2} |b_{N+2-n}||x|^{-n} \leqslant |x_0|^{-1} \sum_{n=1}^{N+2} |b_{N+2-n}| \leqslant \frac{|b_{N+2}|}{2}$$

gilt. Für $|x| > x_0 > 1$ erhalten wir dann also

$$|f(x)| \leqslant \frac{|x|^N \sum_{n=0}^{N} |a_n|}{|x|^{N+2} |b_{N+2} + \sum_{n=0}^{N+1} b_n x^{n-(N+2)}|}$$
$$\leqslant \frac{1}{|x|^2} \frac{\sum_{n=0}^{N} |a_n|}{||b_{N+2}| - |\sum_{n=1}^{N+2} b_{N+2-n} x^{-n}||} \leqslant \frac{1}{|x|^2} \frac{2\sum_{n=0}^{N} |a_n|}{|b_{N+2}|},$$

was eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0]$ ist. Da f als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[-x_0, x_0]$ integrierbar ist, folgt die Existenz des Integrals auf der linken Seite. Wählen wir nun als Integrationsweg $\gamma_R = \gamma_{R,1} + \gamma_{R,2}$ mit

$$\gamma_{R,1}(t) = t, t \in [-R, R], \qquad \gamma_{R,2}(t) = R e^{it}, t \in [0, \pi],$$

wobei wir $R > 0$ so groß wählen, dass γ alle Nullstellen von Q in der Halbebene mit positivem Imaginärteil umschließt, dann folgt mit Hilfe des Residuensatzes (f ist meromorph auf $\mathbb{C}$), dass

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}(f, z),$$

und das unabhängig von R. Können wir jetzt noch zeigen, dass

$$\int_{\gamma_{R,2}} f(z)\,dz \to 0$$

für $R \to \infty$, ist die Aussage bewiesen, da

$$\int_{\gamma_{R,1}} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

für $R \to \infty$. Auf dem Weg $\gamma_{R,2}$ gilt $|z| = R$ und wir erhalten (mit der Zusatzforderung $R > x_0$) mit der Rechnung von oben, dass

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{R^2} \frac{2\sum_{n=0}^{N} |a_n|}{|b_{N+2}|},$$

womit schließlich mit der Standardabschätzung für Wegintegrale folgt, dass für $R \to \infty$

$$\int_{\gamma_{R,2}} f(z)\,\mathrm{d}z \leqslant L(\gamma_{R,2}) \frac{1}{R^2} \frac{2\sum_{n=0}^{N} |a_n|}{|b_{N+2}|} = \frac{1}{R} \frac{2\pi \sum_{n=0}^{N} |a_n|}{|b_{N+2}|} \to 0.$$

(ii) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z+\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(z-\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(z+\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})(z-\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})}$$

erfüllt die Voraussetzungen von (i), da sie rational ist und keine rellen Pole besitzt. Alle vier Singularitäten sind Pole erster Ordnung. Nach **Aufgabe 70 a)** gilt

$$\operatorname{res}\left(f, \frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z \to \frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}} \left(z - \frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}\right) f(z) = \frac{1}{(\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})(\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{i}+1),$$

$$\operatorname{res}\left(f, \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z \to \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}} \left(z - \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}\right) f(z) = \frac{1}{(\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{i}-1).$$

Somit folgt mit Aufgabenteil (i), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{i}+1) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{i}-1)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

b) Wir nehmen jeweils an, dass f nicht konstant ist. Es gilt

$$f(G) \subseteq A_i, \qquad i = 1, \dots, 3,$$

wobei $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a\}$, $A_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = b\}$ und $A_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ für beliebige konstanten a, b und r. Nach dem Satz der Gebietstreue ist $f(G)$ insbesondere offen. Es ist jedoch keine (nichtleere) Teilmenge von einem der A_i offen. Würde ein $z_0 \in A_1$ und ein $\varepsilon > 0$ existieren mit $U_\varepsilon(z_0) \subseteq A_1$, so wäre $z_0 + \frac{\varepsilon}{2} \in A_1$, aber $\operatorname{Re}(z_0 + \frac{\varepsilon}{2}) = a + \frac{\varepsilon}{2} \neq a$. Analog ergibt sich die Aussage für A_2 und A_3. Also kann $f(G)$ nicht offen sein, ein Widerspruch.

Aufgabe 73 (Tutorium)

a) Seien P und Q Polynome in zwei Variablen, $R := \frac{P}{Q}$ und die Funktion

$$t \mapsto R(\cos(t), \sin(t))$$

sei stetig (fortsetzbar) auf $[0, 2\pi]$ (was z.B. der Fall ist, falls Q auf $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ nullstellenfrei ist). Sei außerdem

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k),$$

wobei $z_1, \ldots, z_n$ die Pole von f in $U_1(0)$ seien.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \pi$$

Lösungsvorschlag

a) Zuerst stellen wir fest, dass f eine rationale Funktion in z ist, sodass sie meromorph auf $\mathbb{C}$ ist. Als nächstes sei angemerkt, dass

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z|z|^2 + \overline{z}}{2|z|^2}, \qquad \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z|z|^2 - \overline{z}}{2|z|^2},$$

sodass für $z = x + \mathrm{i}y \in \partial U_1(0)$ (wegen $|z| = 1$) gilt, dass

$$f(z) = \frac{R(x,y)}{z}.$$

Also hat f nach Voraussetzung keine Pole auf $\partial U_1(0)$. Somit existiert für $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ das Integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ und nach dem Residuensatz gilt

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_k) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{R(\cos(t), \sin(t))}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t,$$

womit die Behauptung folgt.

b) Als rationale Funktion von zwei Variablen hat R hier die Form

$$R(x,y) = \frac{y^4}{1+x}.$$

Der Integrand ist stetig außerhalb von $t = \pi$ und kann dort stetig durch 0 fortgesetzt werden, wie man z.B. anhand von L'Hospital erkennt. Damit ist **a)** anwendbar und es gilt

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z})\right)^4}{1 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{1}{16z^4}\frac{(z^2-1)^4}{z + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{8z^4}\frac{(z-1)^4(z+1)^4}{z^2+2z+1} = \frac{1}{8}\frac{(z+1)^2(z-1)^4}{z^4}.$$

f hat also ausschließlich in 0 einen Pol (der Ordnung vier). Das Residuum lässt sich entweder über **Aufgabe 70a)** oder über Ausmultiplizieren und betrachten des Koeffizienten vor $\frac{1}{z}$ berechnen und lautet $\frac{1}{2}$. Somit ergibt sich aus **a)**, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 2\pi \operatorname{res}(f, 0) = \pi.$$

Aufgabe 74 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{1/z} = w$ für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich viele Lösungen z mit $|z| \leqslant r$ für jedes $r > 0$ besitzt.

b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{U_1(0)} \subseteq G$. Beweisen Sie: Ist $f \in H(G)$ und $|f|$ konstant auf $\partial U_1(0)$, f jedoch nicht konstant auf G, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in $U_1(0)$.

c) Berechnen Sie alle Logarithmen von $i - 1$ sowie alle zwölften Wurzeln von 1.

Lösungsvorschlag

a) Nach der Charakterisierung der Logarithmen sind die Lösungen z_k der Gleichung

$$e^{1/z} = w$$

gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{z_k} = \log|w| + i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi),$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist äquivalent zu

$$z_k = \frac{1}{\log|w| + i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

wobei $k = 0$ ausgeschlossen werden muss, falls $w = 1$. Offenbar sind die z_k paarweise verschieden und es gilt

$$|z_k|^2 = \frac{1}{(\log|w|)^2 + (\operatorname{Arg} w + 2k\pi)^2} \to 0 \qquad \text{für } |k| \to \infty.$$

Also existieren zu jedem $r > 0$ unendlich viele z_k mit $|z_k| \leq r$ und $\exp(1/z_k) = w$.

b) Aus der Vorlesung ist das Maximumprinzip bekannt. Hat eine Funktion unter denselben Voraussetzungen keine Nullstelle, können wir dieselbe Aussage über das Minimum machen, indem wir das Maximumprinzip auf $\frac{1}{f}$ anwenden (Minimumprinzip). Wir nehmen an, f hätte keine Nullstelle in $U_1(0)$. Es gilt insbesondere $f \in H(U_1(0))$ und $f \in C(\overline{U_1(0)})$, deshalb folgt mit dem Maximum- und Minimumprinzip, dass

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U_1(0)} |f(z)|$$

und

$$\min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f(z)| = \min_{z \in \partial U_1(0)} |f(z)|.$$

Da $|f|$ auf $\partial U_1(0)$ jedoch konstant ist, sind die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite gleich, also auch diejenigen auf der Linken, womit $|f|$ konstant auf $\overline{U_1(0)}$ ist. Damit ist f auf $U_1(0)$ konstant (vgl. **Aufgabe 19 c)**). Genauer: Wäre dies nicht der Fall, so ist

$$f(U_1(0)) \subseteq \partial U_{|f(0)|}(0),$$

ein Gebiet. Da keine nichtleere Teilmenge von $U_{|f(0)|}(0)$ offen ist, ist dies nicht möglich. Schließlich folgt aus dem Identitätssatz, dass f auch auf G konstant sein muss, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

c) Nach Satz 22.18 sind alle Logarithmen von $\mathrm{i}-1$ gegeben durch

$$z_k = \log|\mathrm{i}-1| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(\mathrm{i}-1) + 2k\pi\mathrm{i}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $|\mathrm{i}-1| = \sqrt{2}$ und $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}-1) = \frac{3\pi}{4}$ folgt demnach, dass

$$z_k = \frac{1}{2}\log(2) + \mathrm{i}\pi(\frac{3}{4} + 2k)$$

für $k \in \mathbb{Z}$ alle Logarithmen von $\mathrm{i}-1$ sind.
Alle zwölften Wurzeln von 1 sind durch

$$w_k = \sqrt[12]{|1|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}(1)+2k\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{6}}$$

für $k = 0,\dots,11$ gegeben. Die bekannten Werte von Sinus und Kosinus an diesen Punkten ergeben die Wurzeln ± 1, $\pm\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe 75 (Tutorium)

Bestimmen Sie jeweils das Maximum und Minimum des Betrages der folgenden Funktionen auf der Menge $\overline{U_1(0)}$.

a) $f_1(z) = \mathrm{e}^{z^2}$,

b) $f_2(z) = z^2 + \mathrm{i}z + 1$,

c) $f_3(z) = \frac{z+3}{z-3}$,

d) $f_4(z) = 3 - |z|^2$.

Lösungsvorschlag

Aus der Vorlesung ist das Maximumprinzip bekannt. Hat eine Funktion unter denselben Voraussetzungen keine Nullstelle, können wir dieselbe Aussage über das Minimum machen, indem wir das Maximumprinzip auf $\frac{1}{f}$ anwenden.

a) Es gilt für $z = x + \mathrm{i}y$, dass

$$|f_1(z)| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z^2)} = \mathrm{e}^{x^2-y^2} \in [\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}]$$

über triviale Abschätzungen mit Hilfe der Monotonie der Exponentialfunktion. Diese Werte werden auch angenommen, denn

$$|f_1(1)| = \mathrm{e}, \qquad |f_1(\mathrm{i})| = \mathrm{e}^{-1}.$$

Somit gilt

$$\max_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_1(z)| = \mathrm{e}, \qquad \min_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_1(z)| = \mathrm{e}^{-1}.$$

b) Zuerst stellen wir fest, dass für $z = x + \mathrm{i}y$ gilt, dass

$$f_2(z) = (x^2 - y^2 - y + 1) + \mathrm{i}x(2y + 1),$$

sodass wir mit $z = \mathrm{i}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ eine Nullstelle von f_2 in $U_1(0)$ gefunden haben. Für das Maximum gilt nach dem Maximumprinzip, dass es sich auf dem Rand befindet. Sei also $z(t) = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t) \in \partial U_1(0)$ (o.B.d.A. $t \in (-\pi, \pi]$) und $g(t) := |f_2(z(t))|^2$. Wir berechnen das Maximum von g, welches zwingendermaßen eine Nullstelle von g' sein muss, denn g ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und gleichzeitig 2π-periodisch. Es gilt

$$\begin{aligned} g(t) &= |z(t)^2 + \mathrm{i}z(t) + 1|^2 = (\cos(2t) - \sin(t) + 1)^2 + (\sin(2t) + \cos(t))^2 \\ &= 3 - 2\sin(t)\cos(2t) + 2\cos(t)\sin(2t) + 2\cos(2t) - 2\sin(t) = 3 + 2\cos(2t), \end{aligned}$$

wobei wir die üblichen Rechenregeln inklusive Additionstheoreme verwenden. Damit folgt

$$g'(t) = -4\sin(2t)$$

welches seine Nullstellen für $t_1 = 0$ und $t_2 = \frac{\pi}{2}$ besitzt. Wegen $g(t_2) = 5 > 1 = g(t_1)$ ist 5 das Maximum von g. Also gilt

$$\max_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_2(z)| = \sqrt{5}, \qquad \min_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_2(z)| = 0.$$

c) Für $z \in \overline{U_1(0)}$ nimmt die Funktion $|z+3|$ ihr Maximum im Punkt $z = 1$ und ihr Minimum im Punkt $z = -1$ an. Die Funktino $|z-3|$ nimmt ihr Maximum im Punkt $z = -1$ und ihr Minimum im Punkt $z = 1$ an. Dies folgt aus Skizzen oder einfachen Ungleichungen über $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x \in [-1,1]$ und $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. Deshalb gilt

$$|f_3(z)| = \frac{|z+3|}{|z-3|} \begin{cases} \leqslant \frac{|1+3|}{|1-3|} = 2, \\ \geqslant \frac{|-1+3|}{|-1-3|} = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Da die jeweiligen Werte in $z = \pm 1$ tatsächlich angenommen werden, folgt

$$\max_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_3(z)| = 2, \qquad \min_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_3(z)| = \frac{1}{2}.$$

d) Wir schreiben $z \in \overline{U_1(0)}$ als $z = re^{\mathrm{i}t}$ mit $0 \leqslant r \leqslant 1$ und $t \in (-\pi, \pi]$. Es gilt

$$|f_4(z)| = f_4(z) = 3 - r^2,$$

was für $r = 0$ maximiert und für $r = 1$ minimiert ist. Es gilt also

$$\max_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_4(z)| = 3, \qquad \min_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_4(z)| = 2.$$

Dass das Maximum nicht auf dem Rand liegt, widerspricht deshalb nicht dem Maxmimumprinzip, da f_4 nur in 0 komplex differenzierbar ist.