Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
13.07.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 76 (Übung)

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) $f(x) = xe^{-|x|}$,

b) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & , -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & , 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$,

e) $f(x) = \frac{x}{x^4+2x^2+1}$.

Lösungsvorschlag

a) f ist absolut integrierbar wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} |x|e^{-|x|} \, dx = 2 \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} xe^{-x} \, dx = 2.$$

Deshalb ist nach Satz 23.4 $\mathcal{F}g$ mit $g(x) = e^{-|x|}$ differenzierbar und

$$(\mathcal{F}g)'(\xi) = \mathcal{F}(-\mathrm{i}f)(\xi) = -\mathrm{i}\mathcal{F}f(\xi).$$

In der Vorlesung wurde $\mathcal{F}g$ bereits berechnet mit

$$\mathcal{F}g(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

Deshalb folgt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{i}(\mathcal{F}g)'(\xi) = -\frac{4\xi\mathrm{i}}{(1+\xi^2)^2}.$$

b) Da f nur auf der kompakten Menge $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nicht Null ist und dort stetig, ist es absolut integrierbar. Es gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})$$

und deshalb für $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{-\mathrm{i}\xi x} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{i}(1-\xi)x} + e^{-\mathrm{i}(1+\xi)x} \, dx.$$

Für $\xi \neq \pm 1$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(1-\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)x} - \frac{1}{\mathrm{i}(1+\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\xi)x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}(1-\xi)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}(1+\xi)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+\xi)\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\xi)\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\xi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}}{1-\xi^2} = \frac{2\cos(\xi\frac{\pi}{2})}{1-\xi^2}.
\end{aligned}
$$

Im Fall $\xi = 1$ ist

$$
\mathcal{F}f(1) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}
$$

und für $\xi = -1$ gilt

$$
\mathcal{F}f(-1) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.
$$

Dabei haben wir $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \pm\mathrm{i}$ benutzt.

c) Bezeichnen wir die Funktion aus Teil **b)** mit g, so gilt

$$
f(x) = g(x - \pi/2)
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 23.4 gilt

$$
\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\xi}}{1-\xi^2} & ,\xi \neq \pm 1, \\ -\mathrm{i}\frac{\pi}{2} & ,\xi = 1, \\ \mathrm{i}\frac{\pi}{2} & ,\xi = -1. \end{cases}
$$

d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$
f(x) = \frac{1}{(x+2)^2+1} = g(x+2)
$$

mit $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Wir berechnen zunächst $\mathcal{F}g$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für die Funktion $h(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ gilt, dass

$$
\mathcal{F}h(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.
$$

Es gilt also $\mathcal{F}g = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)$. Bekanntermaßen ist h absolut integrierbar, genauso wie $\mathcal{F}h$ wegen

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}h(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = 4\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = 4\lim_{R\to\infty}[\arctan(\xi)]_{\xi=0}^{R} = 2\pi.
$$

Deshalb erfüllt h die Voraussetzungen für die Inversionsformel und es gilt

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}(\mathcal{F}h)(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)(-\xi).$$

Somit gilt

$$\mathcal{F}g(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)(\xi) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi h(-\xi) = \pi e^{-|\xi|}$$

und schließlich mit Satz 23.4

$$\mathcal{F}f(\xi) = e^{2\xi i}\mathcal{F}g(\xi) = \pi e^{2\xi i-|\xi|}.$$

e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}g'(x)$$

mit g wie in **d)**. Da g und g' absolut integrierbar sind (der Nenner ist nullstellenfrei und das dortige Polynom hat einen um 2 bzw. 3 höheren Grad als dasjenige im Zähler), folgt aus Satz 23.4

$$\mathcal{F}f(\xi) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}g'(\xi) = -\frac{1}{2}i\xi\mathcal{F}g(\xi) = -\frac{1}{2}i\xi\pi e^{-|\xi|}$$

Aufgabe 77 (Übung)

Zu $\alpha > 0$ definiere

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\varphi_\alpha * \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta}$$

für alle $\alpha, \beta > 0$ gilt.

Lösungsvorschlag

Laut Vorlesung gilt ($\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$)

$$\mathcal{F}\varphi_1(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Für jedes $\alpha > 0$ gilt

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x/\sqrt{\alpha})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi_1(x/\sqrt{\alpha}).$$

Nach Satz 23.4 gilt nun

$$\mathcal{F}\varphi_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{1/\sqrt{\alpha}}\mathcal{F}\varphi_1\left(\frac{\xi}{1/\sqrt{\alpha}}\right) = \mathcal{F}\varphi_1(\sqrt{\alpha}\xi) = e^{-\frac{\alpha\xi^2}{2}}.$$

Für alle $\alpha, \beta > 0$ sind φ_α und φ_β absolut integrierbar und beschränkt, womit $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$ absolut integrierbar und beschränkt ist nach Satz 23.9. Außerdem gilt

$$\mathcal{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(\xi) = \mathcal{F}\varphi_\alpha(\xi)\cdot\mathcal{F}\varphi_\beta(\xi) = e^{-\frac{\alpha\xi^2}{2}}\cdot e^{-\frac{\beta\xi^2}{2}} = e^{-\frac{(\alpha+\beta)\xi^2}{2}} = \mathcal{F}\varphi_{\alpha+\beta}(\xi).$$

Somit sind $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$, $\mathcal{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)$, $\varphi_{\alpha+\beta}$ und $\mathcal{F}\varphi_{\alpha+\beta}$. Damit sind die Voraussetzungen der Inversionsformel erfüllt und es gilt

$$(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathcal{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathcal{F}(\varphi_{\alpha+\beta})(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \varphi_{\alpha+\beta}(x).$$

für $x \in \mathbb{R}$ und somit die geforderte Gleichheit.

Aufgabe 78 (Übung)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) Zeigen Sie: Sind f, g und $\mathcal{F}g$ absolut integrierbar, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Folgern Sie daraus: Falls

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}f \cap \operatorname{supp}\mathcal{F}g = \emptyset,$$

dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = 0,$$

wobei $\operatorname{supp} h = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$ den Träger von $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnet.

Lösungsvorschlag

a) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leqslant 1 \\ 0 & , |x| > 1. \end{cases}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\mathcal{F}f(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\xi)}{\xi} & , \xi \neq 0 \\ 2 & , \xi = 0. \end{cases}$$

Nach dem Satz von Plancherel folgt

$$2 = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$$

beziehungsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \pi.$$

Da $\xi \mapsto \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$ eine gerade Funktion ist folgt somit

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

b) Da f und $\mathcal{F}g$ absolut integrierbar sind, folgt mit Satz 23.5, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}g})(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Weiter gilt

$$\overline{\mathcal{F}g(\xi)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}g(x)\,\mathrm{d}x} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\xi)x}\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}\overline{g}(-\xi).$$

Da auf g absolut integrierbar ist, folgt aus der Inversionsformel, dass

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}g})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathcal{F}\overline{g}(-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathcal{F}\overline{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\overline{g(x)}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert die erste Behauptung.
Mit $\operatorname{supp}\mathcal{F}f \cap \operatorname{supp}\mathcal{F}g = \emptyset$ folgt auch $\operatorname{supp}\mathcal{F}f \cap \operatorname{supp}\overline{\mathcal{F}g} = \emptyset$. Somit ist

$$\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)} = 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$