

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

1. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 1 (ÜBUNG)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt

$$\text{Bild}(A)^\perp = \text{Kern}(A^*).$$

Hinweis: Ist V ein Skalarproduktraum, so ist für $M \subseteq V$ der Orthogonalraum $M^\perp$ von M gegeben durch $M^\perp = \{v \in V : v \perp w \ \forall w \in M\}$.

b) Sind U und W endlich-dimensionale Untervektorräume eines Vektorraums, so gilt $\dim(U + W) \leq \dim(U) + \dim(W)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $U \cap W = \{0\}$.

c) Gilt $m = n$ und ist A selbstadjungiert, d.h., gilt $A = A^*$, so gilt $\mathbb{K}^n = \text{Kern}(A) \oplus \text{Bild}(A)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Dimensionsformel.

AUFGABE 2 (TUTORIUM)

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot | \cdot)$. Weiter seien Vektoren $v, w, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \mid \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} (u_i \mid v_j).$$

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V . Beweisen Sie die Formeln

a) $(v \mid w) = \sum_{i=1}^n (v \mid e_i) \overline{(w \mid e_i)}.$

b) $(v \mid v) = \sum_{i=1}^n |(v \mid e_i)|^2.$

AUFGABE 3 (ÜBUNG)

Seien $G \neq \emptyset$ eine Menge und $\circ : G \times G \rightarrow G$ eine Verknüpfung auf G und G erfülle (G1) der Vorlesung.

(G2') $\exists e_R \in G \ \forall a \in G : a \circ e_R = a$. e_R heißt *rechtsneutrales Element*.

(G3') $\forall a \in G \ \exists b \in G : a \circ b = e_R$, wobei e_R rechtsneutrales Element sei. b heißt *rechtsinverses Element* zu a .

(KS) $\forall a, b \in G : a \circ b \circ a = b$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Genügt G zusätzlich (G2') und (G3'), so ist G eine Gruppe.

b) Genügt G zusätzlich (G2'), (G3') und (KS), so ist G abelsch und es gilt $\forall a \in G : a \circ a = e$.

c) Ist G eine Gruppe, so sind das neutrale Element und zu jedem Element die Inverse eindeutig bestimmt.

AUFGABE 4 (TUTORIUM)

Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass U versehen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist.

AUFGABE 5 (ÜBUNG)

Es sei $V = P[-1, 1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[-1, 1]$ und $p_m \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$. Ferner sei die Abbildung $(\cdot | \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(p|q) = \int_{-1}^1 \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

für alle $p, q \in V$. Zeigen Sie, dass durch $(\cdot | \cdot)$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist und wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $(\cdot | \cdot)$ auf $\{p_0, p_1, p_2\}$ an.

AUFGABE 6 (TUTORIUM)

- a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \text{lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion Px von x auf U , sowie den Abstand $d(x, U) = \min_{y \in U} \|x - y\|$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- b) Lösen Sie AUFGABE 5 mit dem (bekannten) Skalarprodukt $(p|q) = \int_{-1}^1 p(y)q(y) dy$.

Allgemeine Informationen

- Webseite zur Vorlesung: <http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/hm2phys2016s/>.
- Sprechzeiten von Dr. Schmoeger: Dienstags, 10-11 Uhr (Raum 2.046, **Geb. 20.30**) oder nach Vereinbarung per E-Mail (christoph.schmoeger@kit.edu).
- Sprechzeiten von Michael Hott: Montags, 14-16 Uhr (Raum 2.023, **Geb. 20.30**) oder nach Vereinbarung per E-Mail (michael.hott@kit.edu).

Übungsbetrieb

- **WICHTIG: Anmeldung** für die Tutorien bis zum **22.04.2016 um 20 Uhr** unter <http://www.redseat.de/kit-phys/>. Die Einteilung wird am Samstag, den 23.04.2016, per E-Mail verschickt.
- Übungsblätter erscheinen wöchentlich (montags) auf obiger Webseite. Sie umfassen den Stoff der aktuellen Woche und werden zum Teil freitags in der Übung, zum Teil in den Tutorien der folgenden Woche besprochen.

Klausur

- Eine **Übungsklausur** (Anmeldung für Studenten mit Scheinpflcht bei Dr. Nagato-Plum, Raum 2.029, **Geb. 20.30**) findet am **09.07.2016 von 10 bis 12 Uhr** statt.
- Die **Modulprüfung HM I** findet am **20.09.2016 von 8 bis 10 Uhr** statt. Die **Modulprüfung HM II** findet am **19.09.2016 von 9 bis 11 Uhr** statt.