Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

SS 2016
29.04.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt
$$\operatorname{Bild}(A)^\perp = \operatorname{Kern}(A^*).$$
Hinweis: Ist V ein Skalarproduktraum, so ist für $M \subseteq V$ der *Orthogonalraum* $M^\perp$ von M gegeben durch $M^\perp = \{v \in V : v \perp w\ \forall w \in M\}$.

b) Sind U und W endlich-dimensionale Untervektorräume eines Vektorraums, so gilt $\dim(U+W) \leqslant \dim(U) + \dim(W)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $U \cap W = \{0\}$.

c) Gilt $m = n$ und ist A *selbstadjungiert*, d.h., gilt $A = A^*$, so gilt $\mathbb{K}^n = \operatorname{Kern}(A) \oplus \operatorname{Bild}(A)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Dimensionsformel.

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen zunächst, dass in jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V für alle $x \in V$
$$\forall y \in V : (x|y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
gilt.

Beweis: $\Rightarrow$: Wähle $y = x$, dann ist $(x|x) = 0$. Das ist nach Eigenschaft (S3) (vgl. Abschnitt 15.1 der Vorlesung) nur für $x = 0$ möglich.

$\Leftarrow$: Sei $y \in V$ beliebig. Es gilt $(0|y) = (y - y|y) = (y|y) - (y|y) = 0$.

Nun gilt:
$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Bild}(A)^\perp &\Leftrightarrow \forall z \in \operatorname{Bild}(A) : (x|z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{K}^m : (x|Ay) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{K}^m : (A^*x|y) = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nach Obigem äquivalent zu $A^*x = 0$. Dies ist wiederum äquivalent zu $x \in \operatorname{Kern}(A^*)$.

b) Seien $\{u_1; u_2; \ldots; u_M\}$ eine Basis von U und $\{w_1; w_2; \ldots; w_N\}$ eine Basis von W.
Fall 1: $U \cap W = \{0\}$.
Es ist $\{u_1; \ldots\ u_M; w_1; \ldots; w_N\}$ linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{M+N} \in \mathbb{K}$ derart, dass $\sum_{j=1}^M \lambda_j u_j + \sum_{j=1}^N \lambda_{M+j} w_j = 0$. Insbesondere gilt dann
$$U \ni \sum_{j=1}^M \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^N (-\lambda_{M+j}) w_j \in W.$$

Daraus folgte dann wegen $U \cap W = \{0\}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M} \lambda_j u_j &= 0 \quad \overset{\{u_1;\ldots;u_M\} \text{ Basis}}{\Rightarrow} \quad \lambda_j = 0 \; \forall j \in \{1;2;\ldots;M\}, \\ \sum_{j=1}^{N} \lambda_{M+j} w_j &= 0 \quad \overset{\{w_1;\ldots;w_N\} \text{ Basis}}{\Rightarrow} \quad \lambda_j = 0 \; \forall j \in \{M+1;M+2;\ldots;M+N\}. \end{aligned}$$

Da also alle $\lambda_j = 0$ sein müssen, folgt die lineare Unabhängigkeit von $\{u_1;\ldots;u_M;w_1;\ldots;w_N\}$. Offensichtlich (!) ist $\{u_1;\ldots;u_M;w_1;\ldots;w_N\}$ ein Erzeugendensystem von $U+W$ und wegen der linearen Unabhängigkeit eine Basis von $U+W$. Insbesondere gilt

$$\dim(U+W) \;=\; M+N \;= \dim(U) + \dim(W).$$

<u>Fall 2:</u> $U \cap W \neq \{0\}$.
Sei $0 \neq v \in U \cap W$. Dann existieren $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_{M+N} \in \mathbb{K}$ derart, dass

$$\sum_{j=1}^{M} \lambda_j u_j \;= v \;= \sum_{j=1}^{N} (-\lambda_{M+j}) w_j.$$

Da $v \neq 0$ gibt es ein $k \in \{1;2;\ldots;M\}$ derart, dass $\lambda_k \neq 0$. Weiter gilt

$$\sum_{j=1}^{M} \lambda_j u_j + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{M+j} w_j \;=\; 0.$$

Da $\lambda_k \neq 0$ und damit nicht alle λ_j gleich 0 sind, ist $S := \{u_1;u_2;\ldots;u_M\; w_1;w_2;\ldots;w_N\}$ kein linear unabhängiges System. Damit ist die Dimension von $\operatorname{lin}(S)$ höchstens $M+N-1 < M+N = \dim(U)+\dim(W)$. S ist jedoch ein Erzeugendensystem von $U+W$ und daher gilt auch

$$\dim(U+W) \;=\; \dim(\operatorname{lin}(S)) \;\leqslant\; M+N-1 \;<\; M+N \;=\; \dim(U)+\dim(W).$$

Aufgrund der strikten Ungleichung ist insbesondere der Zusatz gezeigt, dass $\dim(U+W) = \dim(U)+\dim(W)$ genau dann gilt, wenn $U \cap W = \{0\}$.

c) Sei nun $m = n$ und A selbst-adjungiert, d.h. $A = A^*$. Nach **a)** gilt dann

$$\operatorname{Bild}(A)^{\perp} \;=\; \operatorname{Kern}(A^*) \;=\; \operatorname{Kern}(A).$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Kern}(A) \cap \operatorname{Bild}(A) = \{0\}$. Mit **b)** und der **Dimensionsformel** folgt nun

$$\dim(\operatorname{Kern}(A) + \operatorname{Bild}(A)) \overset{\textbf{b)}}{=} \dim(\operatorname{Kern}(A)) + \dim(\operatorname{Bild}(A)) \overset{\textbf{Dim.-Formel}}{=} n.$$

Damit folgt (!) $\operatorname{Kern}(A) + \operatorname{Bild}(A) = \mathbb{K}^n$. *Tipp*: Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 2 (Tutorium)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren $v, w, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \big(u_i | v_j \big).$$

Sei $\{e_1,\dots,e_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V. Beweisen Sie die Formeln

a) $(v|w) = \sum_{i=1}^n (v|e_i)\overline{(w|e_i)}$.

b) $(v|v) = \sum_{i=1}^n |(v|e_i)|^2$.

Lösungsvorschlag

Durch die Eigenschaften des Skalarprodukts ist die erste Formel leicht einzusehen, den rigorosen Beweis liefert eine kleine Induktion. Wir zeigen zunächst, dass für $m \in \mathbb{N}$ und $u \in V$ beliebig

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i | u\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (u_i|u).$$

Induktionsanfang (m=1): Auf beiden Seiten der Gleichung steht exakt derselbe Ausdruck.
Induktionsschritt: Die Formel gelte für ein $m \in \mathbb{N}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i u_i | u\right) &= \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \alpha_{m+1} u_{m+1} | u\right) \overset{(S2)}{=} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i | u\right) + \alpha_{m+1} (u_{m+1}|u) \\ &\overset{IV}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i (u_i|u) + \alpha_{m+1} (u_{m+1}|u) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i (u_i|u)\end{aligned}$$

Nun folgt mit dieser Formel und (S1), dass

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i | \sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(u_i | \sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j | u_i\right)} \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{\sum_{j=1}^n \beta_j \left(v_j|u_i\right)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \overline{\left(v_j|u_i\right)} \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \left(u_i|v_j\right)\end{aligned}$$

Ist $\{e_1,\dots,e_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V, so lassen sich $v, w \in V$ schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^n (v|e_i) e_i, \qquad w = \sum_{j=1}^n \left(w|e_j\right) e_j.$$

Mithilfe der bewiesenen Formel ergibt sich nun

a)

$$\begin{aligned}(v|w) &= \left(\sum_{i=1}^n (v|e_i) e_i | \sum_{j=1}^n \left(w|e_j\right) e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (v|e_i) \overline{\left(w|e_j\right)} \underbrace{\left(e_i|e_j\right)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n (v|e_i) \overline{(w|e_i)}\end{aligned}$$

b)

$$(v|v) \overset{\textbf{a)}}{=} \sum_{i=1}^{n} (v|e_i)\overline{(v|e_i)} = \sum_{i=1}^{n} |(v|e_i)|^2$$

Aufgabe 3 (Übung)

Seien $G \neq \emptyset$ eine Menge und $\circ : G \times G \to G$ eine Verknüpfung auf G und G erfülle $(G1)$ der Vorlesung.

(G2') $\exists e_R \in G\ \forall a \in G:\ a \circ e_R = a$. e_R heißt *rechtsneutrales Element.*

(G3') $\forall a \in G\ \exists b \in G:\ a \circ b = e_R$, wobei e_R rechtsneutrales Element sei. b heißt *rechtsinverses Element* zu a.

(KS) $\forall a, b \in G:\ a \circ b \circ a = b$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Genügt G zusätzlich $(G2')$ und $(G3')$, so ist G eine Gruppe.

b) Genügt G zusätzlich $(G2')$, $(G3')$ und (KS), so ist G abelsch und es gilt $\forall a \in G : a \circ a = e$.

c) Ist G eine Gruppe, so sind das neutrale Element und zu jedem Element die Inverse eindeutig bestimmt.

Lösungsvorschlag

a) G genüge zusätzlich $(G2')$ und $(G3')$. Wir zeigen zunächst, dass ein Rechtsinverses auch stets linksinvers (analog definiert) ist. Seien $a, b \in G$ derart, dass $ab = a \circ b = e_R$ gilt. Dabei lassen wir der einfacheren Notation halber $\circ$ weg. Dann gilt

$$ba \overset{(G2')}{=} b(ab)a \overset{(G1)}{=} (ba)(ba) \overset{(G3')}{\Leftrightarrow} e_R = (ba)[(ba)(ba)^{-1}] \overset{(G3')}{=} (ba)e_R \overset{(G2')}{=} ba,$$

wobei $(ba)^{-1}$ die Rechtsinverse zu ba sei. Damit ist b auch die Linksinverse zu a. Außerdem gilt

$$e_R a \overset{(G2')}{=} aa^{-1}e_R a \overset{(G2')}{=} aa^{-1}a \overset{(G3)}{=} ae_R \overset{(G2')}{=} a.$$

Also ist e_R auch linksneutrales Element (analog definiert). Insgesamt sind $(G2)$ und $(G3)$ der Vorlesung erfüllt und G ist nach Definition eine Gruppe.

b) G genüge zusätzlich $(G2')$, $(G3')$ und (KS). Nach **a)** ist G eine Gruppe. Dann gilt weiter für $a \in G$

$$a^2 \overset{(G2)}{=} aea \overset{(KS)}{=} e.$$

Darüber hinaus erhalten wir

$$ab \overset{(G2)}{=} (ab)(a^2) \overset{(G1)}{=} (aba)a \overset{(KS)}{=} ba.$$

c) Seien e und $\tilde{e}$ zwei neutrale Elemente von G. Dann gilt

$$e = e\tilde{e} = \tilde{e}.$$

Seien a^{-1} und $\widetilde{a^{-1}}$ zwei inverse Elemente zu $a \in G$. Dann gilt

$$a^{-1} = a^{-1}e = a^{-1}a\widetilde{a^{-1}} = e\widetilde{a^{-1}} = \widetilde{a^{-1}}.$$

Aufgabe 4 (Tutorium)

Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass U versehen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist.

Lösungsvorschlag

Für $i = 1, 2, 3$ seien $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ und

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & a_i & b_i \\ 0 & 1 & c_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U.$$

Zunächst muss gewährleistet sein, dass die Matrixmultiplikation zwei Elemente aus U wieder auf ein Element aus U abbildet. Es gilt

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 + a_1 c_2 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U.$$

Für die Assoziativität (G1) berufen wir uns auf **Satz 14.16** aus **HM1**, der besagt, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Wir können es aber auch nachrechnen und erhalten

$$(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 + a_1 c_2 + a_1 c_3 + a_2 c_3 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 + c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3).$$

Das neutrale Element (G2) ist gegeben durch die Einheitsmatrix, welche in U liegt. Daran, dass jedes Element in U in seiner Zeilenstufenform vorliegt, erkennen wir, dass dazu ein Inverses bezüglich der Matrizenmultiplikation existiert. Es bleibt zu zeigen, dass dieses Inverse auch in U liegt. Wir berechnen, dass

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow + \\ \\ \cdot(-b) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot(-c) \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot(-a) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

womit die rechte Seite, ein Element aus U, das Inverse der Anfangsmatrix ist.

Aufgabe 5 (Übung)

Es sei $V = P[-1, 1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[-1, 1]$ und $p_m \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1,1]$. Ferner sei die Abbildung $(\cdot|\cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(p|q) = \int_{-1}^{1} \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$$

für alle $p, q \in V$. Zeigen Sie, dass durch $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist und wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $(\cdot|\cdot)$ auf $\{p_0, p_1, p_2\}$ an.

Lösungsvorschlag

Dass die Abbildung $(\cdot|\cdot)$ wohldefiniert ist, liegt daran, dass jedes reelle Polynom auf $[-1,1]$ (nach oben und unten) beschränkt ist, wodurch

$$\begin{aligned}
|(p|q)| &\leqslant C_{p,q} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = C_{p,q}\left[\lim_{b\to -1+}\int_{b}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{a\to 1-}\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y\right] \\
&\overset{x=-t}{=} C_{p,q}\left[\lim_{b\to 1-}\int_{0}^{b} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \lim_{a\to 1-}\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y\right] = 2C_{p,q}\lim_{a\to 1-}\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= 2C_{p,q}\lim_{a\to 1-}\left[\arcsin(y)\right]_{y=0}^{y=a} = 2C_{p,q}\lim_{a\to 1-}\arcsin(a) = C_{p,q}\pi.
\end{aligned}$$

Somit ist das uneigentliche Riemannintegral nach dem Majorantenkriterium konvergent. Die Symmetrie (S1) der Abbildung ist nun sofort klar, ebenso wie die Linearität (S2) nach der Linearität des Integrals. Die Positivität (S3) folgt aus folgender Aussage, da der Integrand in $(p|p)$ positiv und nicht konstant Null ist, wenn p nicht das Nullpolynom ist:

Behauptung: Ist $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition der Aussage. Dazu nehmen wir an, dass $f(x) \neq 0$ für ein $x \in [a,b]$. Insbesondere gilt dies auch für ein $x_0 \in (a,b)$: Sind $f(a) = f(b) = 0$, so ist dies klar, ansonsten sei o.B.d.A. $f(a) \neq 0$. Im letzten Fall ist entweder $f(\frac{b+a}{2}) \neq 0$ (dann wähle $x_0 = \frac{b+a}{2}$) oder $f(\frac{b+a}{2}) = 0$. Dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in (a, \frac{b+a}{2})$ mit $f(x_0) = \frac{f(a)}{2} \neq 0$. Setze $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq [a,b]$ (da x_0 ein innerer Punkt von $[a,b]$ ist) und

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta].$$

Insbesondere gilt für diese x

$$|f(x)| = |f(x_0) - (f(x_0) - f(x))| \geqslant |f(x_0)| - |f(x_0) - f(x)| = \varepsilon - |f(x_0) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen der Monotonie des Integrals folgt nun

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^{x_0-\delta} 0\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} 0\,\mathrm{d}x = 2\delta\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \delta\varepsilon > 0,$$

womit die Behauptung folgt. □

Nun verwenden wir die Notation aus Abschnitt 15.2. Es gilt

$$(p_0|p_0) \quad = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \overset{\text{s.o.}}{=} \pi.$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für alle $t \in [-1,1]$.

Ferner ist

$$(p_1|b_0) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

Nach der ersten Rechnung dieser Aufgabe konvergiert das uneigentliche Integral in $(p_1|b_0)$ nach dem Majorantenkriterium. Da der Integrand punktsymmetrisch ist, gilt $(p_1|b_0) = 0$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
(p_1|p_1) \quad &= \quad \int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to-1+}\int_b^0\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{x=-t}{=} \quad 2\lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}\frac{\sin^2(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \quad 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \overset{\textbf{HM1, A61}}{=} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

In **Aufgabe 61** wurde das Integral über die Potenzen des Kosinus behandelt, durch die Symmetrie gelten für den Sinus jedoch dieselben Werte. Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}t$ für alle $t \in [-1,1]$.
Ferner ist

$$(p_2|b_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(p_1|p_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und

$$(p_2|b_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

Wie bei $(p_1|b_0)$ sieht man, dass $(p_2|b_1) = 0$ gilt. Für alle $t \in [-1,1]$ gilt also

$$c_2(t) = p_2(t) - (p_2|b_0)\,b_0(t) - (p_2|b_1)\,b_1(t) = t^2 - \frac{1}{2}.$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
(c_2|c_2) \quad &= \quad \int_{-1}^{1}\frac{\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - \int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \quad \int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - (p_1|p_1) + \frac{1}{4}(p_0|p_0) = \int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \quad &= \quad \lim_{b\to-1+}\int_b^0\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y + \lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{x=-t}{=} \quad 2\lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}\frac{\sin^4(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \quad 2\lim_{a\to1-}\int_0^{\arcsin(a)}\sin^4(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(t)\,\mathrm{d}t \overset{\textbf{HM1, A61}}{=} \frac{3\pi}{8},
\end{aligned}$$

also

$$(c_2|c_2) = \frac{\pi}{8}.$$

Somit ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2t^2 - 1)$ für alle $t \in [-1, 1]$.

Aufgabe 6 (Tutorium)

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \operatorname{lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion Px von x auf U, sowie den Abstand $d(x, U) = \min_{y \in U} \|x - y\|$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie **Aufgabe 5** mit dem (bekannten) Skalarprodukt $(p|q) = \int_{-1}^{1} p(y)q(y)\,\mathrm{d}y$.

Lösungsvorschlag

a) Wir berechnen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens (vgl. Abschnitt 15.2 der Vorlesung) ein Orthonormalsystem $B = \{b_1; b_2; b_3\}$, welches U erzeugt, wie folgt:

$$\begin{aligned} & & b_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ c_2 &= v_2 - (v_2|b_1)b_1 & b_2 &= \frac{c_2}{\|c_2\|} \\ c_3 &= v_3 - (v_3|b_1)b_1 - (v_3|b_2)b_2 & b_3 &= \frac{c_3}{\|c_3\|} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$(v_2|b_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0) = \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow c_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\|c_2\| = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(v_3|b_1) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ (v_3|b_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow c_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\|c_3\| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung ist die Orthogonalprojektion Px gegeben durch:

$$Px = (x|b_1)b_1 + (x|b_2)b_2 + (x|b_3)b_3$$

Wir berechnen:

$$(x|b_1) = \frac{7}{\sqrt{3}}, \qquad (x|b_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad (x|b_3) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Es folgt:

$$Px = \frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix}$$

Schließlich ist nach Abschnitt 15.8 der Vorlesung:

$$d(x,U) = \min_{y\in U}\|x-y\| = \|x-Px\|$$

Wir berechnen:

$$x - Px = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}, \qquad \|x - Px\| = \frac{\sqrt{228}}{3} \approx 5,03$$

b) Wieder mit der Notation aus dem Abschnitt 15.2 der Vorlesung gilt:

$$(p_0|p_0) = \int_{-1}^{1} 1 \ \mathrm{d}y = 2.$$

Also ist $b_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $t \in [-1,1]$.

Ferner ist

$$(p_1|b_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y \ \mathrm{d}y = 0.$$

Des Weiteren ist

$$(p_1|p_1) = \int_{-1}^{1} y^2 \ \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2}{3}.$$

Also ist $b_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t$ für alle $t \in [-1,1]$.

Ferner ist

$$(p_2|b_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} y^2 \ \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{und} \qquad (p_2|b_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} y^3 \ \mathrm{d}y = 0.$$

Also ist

$$c_2(t) = p_2(t) - (p_2|b_0)\, b_0(t) - (p_2|b_1)\, b_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

für alle $t \in [-1,1]$ und wegen

$$(c_2|c_2) = \int_{-1}^{1} \left(y^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \ \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^4 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9} \ \mathrm{d}y = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

ist $b_2(t) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$ für alle $t \in [-1,1]$.