

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

2. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 7 (ÜBUNG)

a) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_2 : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(i) f_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |t| < a, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ für ein festes } 0 < a < \pi,$$

$$(ii) f_2(t) = |\sin(t)|,$$

für jedes $t \in [-\pi, \pi)$. Für welche $t \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi, \pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

b) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{k} \text{ für ein festes } 0 < a < \pi,$$

$$(ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1},$$

$$(iii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

AUFGABE 8 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f_1, f_3 : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ und die (komplexen) Fourierkoeffizienten von $f_2 : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

a) $f_1(t) = |t|,$

b) $f_2(t) = e^{wt}$ für ein $w \in \mathbb{C},$

c) $f_3(t) = \sinh(t)$

für jedes $t \in [-\pi, \pi)$. Für welche $t \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die jeweilige Fourier-Reihe? In welchen $t \in [-\pi, \pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

AUFGABE 9 (ÜBUNG)

a) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ differenzierbar mit $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie

$$\widehat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

b) Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)} \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |k^n \hat{f}(k)| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

AUFGABE 10 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a}$ für ein festes $a > 0$.

AUFGABE 11 (ÜBUNG)

- a) Folgt aus $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und f differenzierbar, dass $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$?
- b) Wenn $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und differenzierbar ist, ist dann auch g' 2π -periodisch?
- c) Seien $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Ist $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$?
- d) Seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und g' 2π -periodisch. Ist g 2π -periodisch?

AUFGABE 12 (TUTORIUM)

Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$$

die Fourierreihe einer Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$?

Hinweis: Benutzen Sie die Besselsche Ungleichung.