Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

SS 2016
06.05.2016

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

### Vorgeplänkel

In der Vorlesung haben wir den Darstellungssatz für $2\pi-$periodische Funktionen kennengelernt. Im folgenden sind jedoch die Fourierreihen von auf $[-\pi,\pi)$ definierten Funktionen berechnet und auf punktweise Konvergenz gegen die jeweiligen Funktionen untersucht werden. Der Darstellungssatz, **Satz 16.2** gibt jedoch lediglich eine Aussage für auf $\mathbb{R}$ definierte $2\pi-$periodische Funktionen. Diesen Umstand umgehen wir dadurch, dass wir zunächst die betrachtete Funktion $f:[-\pi,\pi)\to\mathbb{C}$ periodisch zu einer Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ fortsetzen. Wenn $f$ stückweise glatt ist, ist $g$ dies auch und wir erhalten insbesondere für alle $t\in(-\pi,\pi)$ die Konvergenz der zu $g$ gehörigen Fourierreihe gegen $\frac{g(t+)+g(t-)}{2}=\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Das heißt gerade, dass die zu $f$ gehörige Fourierreihe in $t\in(-\pi,\pi)$ gegen $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$ konvergiert. Außerdem gilt wegen der $2\pi$-Periodizität und der stückweisen Stetigkeit von $g$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(-\pi)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{g}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(-\pi)} \overset{16.2}{=} \frac{g(-\pi+)+g(-\pi-)}{2}\\ &= \frac{g(-\pi+)+g((-\pi+2\pi)-)}{2} = \frac{g(-\pi+)+g(\pi-)}{2} = \frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}.\end{aligned}$$

### Aufgabe 7 (Übung)

**a)** Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktionen $f_1,f_2:[-\pi,\pi)\to\mathbb{C}$ mit

(i) $f_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{2a} & \text{für } |t|<a,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ für ein festes $0<a<\pi$,

(ii) $f_2(t)=|\sin(t)|$,

für jedes $t\in[-\pi,\pi)$. Für welche $t\in[-\pi,\pi)$ konvergiert die jeweilige Fourierreihe? In welchen $t\in[-\pi,\pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

**b)** Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(ak)}{k}$ für ein festes $0<a<\pi$,

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$.

**Lösungsvorschlag**

**a)** (i) Da $f_1$ eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t) f_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a\pi}\int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi},$$

während für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k(f_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot t) f_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a\pi}\int_{-a}^{a} \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2ak\pi}\left[\sin(kt)\right]_{t=-a}^{a} = \frac{\sin(ak)}{ak\pi}$$

gilt.

Mit der Zerlegung $\{-\pi, -a, a, \pi\}$ ist $f_1$ stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourierreihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ gegen $\frac{f_1(t+)+f_1(t-)}{2}$. Insbesondere stellt die Fourierreihe für jedes $t \in [-\pi, \pi) \setminus \{-a, a\}$ die Funktion $f_1$ dar, da $f_1$ dort stetig ist. Folglich kann die Konvergenz auch nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig bei $-a$ und $a$ ist.

(ii) Da $f_2$ eine gerade Funktion ist, ist $b_k(f_2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist

$$a_0(f_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0 \cdot t)|\sin(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Für $a_k(f_2)$ mit $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir vorbereitend

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{u'}\underbrace{\cos(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t \quad = \quad -\cos(t)\cos(kt) - k\int \cos(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t.$$

Für $k = 1$ ist also

$$\int \sin(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos^2(t),$$

für $k > 1$ führt eine weitere partielle Integration auf

$$\begin{aligned}
-\cos(t)\cos(kt) - k\int \underbrace{\cos(t)}_{u'}\underbrace{\sin(kt)}_{v}\,\mathrm{d}t \quad &= \quad -\cos(t)\cos(kt) - k\left(\sin(t)\sin(kt) - k\int \sin(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\right) \\
\Rightarrow \int \sin(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \quad &= \quad \frac{1}{k^2-1}\left(\cos(t)\cos(kt) + k\sin(t)\sin(kt)\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
a_k(f_2) \quad &= \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(kt)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \quad \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\left[\cos^2(t)\right]_{t=0}^{\pi} = 0 & \text{für } k = 1, \\ \frac{2}{\pi(k^2-1)}\left[\cos(t)\cos(kt) + k\sin(t)\sin(kt)\right]_{t=0}^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^k}{k^2-1} & \text{für } k > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ ist $f_2$ stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourierreihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$

gegen $\frac{f_2(t+)+f_2(t-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von $f_2$, wegen $f_2(-\pi) = \lim_{t\to\pi-} f_2(t) = 0$, stetig ist, stellt die Fourierreihe für jedes $t \in [-\pi, \pi)$ die Funktion $f_2$ dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_2)\cos(kt)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

ist die Fourierreihe nach **Satz 7.18 (2)** aus **HM I** gleichmäßig konvergent, da wir die Summanden gliedweise und unabhängig von $t$ nach oben durch eine konvergente Reihe abgeschätzt haben.

**b)** (i) Nach **a) (i)** gilt, dass die Funktion $f_1$ außerhalb von $\pm a$ mit ihrer Fourierreihe übereinstimmt. Für $t = 0$ ergibt sich also

$$\frac{1}{2a} = f_1(0) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{ak\pi},$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ak)}{k} = \frac{\pi - a}{2}$$

(ii) Gleich wie in (i) folgt, dass

$$0 = f_2(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

(iii) Laut Vorlesung lauten die Fourierkoeffizienten der Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, definiert durch $f(t) = t^2$, gerade

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \hat{f}(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Nach **Satz 16.4 (1)** gilt

$$\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^4}$$

Einsetzen von $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi^5}{5}$ liefert

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

wodurch sich durch Auflösen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ergibt.

## Aufgabe 8 (Tutorium)

Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktionen $f_1, f_3 : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ und die (komplexen) Fourierkoeffizienten von $f_2 : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ mit

**a)** $f_1(t) = |t|$,

**b)** $f_2(t) = \mathrm{e}^{wt}$ für ein $w \in \mathbb{C}$,

**c)** $f_3(t) = \sinh(t)$

für jedes $t \in [-\pi,\pi)$. Für welche $t \in [-\pi,\pi)$ konvergiert die jeweilige Fourierreihe? In welchen $t \in [-\pi,\pi)$ stellt sie die jeweilige Funktion dar? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

## Lösungsvorschlag

**a)** Da $f_1$ eine gerade Funktion ist, folgt $b_k(f_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_0(f_1) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \,\mathrm{d}t = \pi$$

sowie

$$\begin{aligned} a_k(f_1) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos(kt) \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\Bigg(\underbrace{[\frac{1}{k}t\sin(kt)]_{t=0}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kt)\,\mathrm{d}t\Bigg) = \frac{2}{\pi k^2}[\cos(kt)]_{t=0}^{\pi} = 2\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Mit der Zerlegung $\{-\pi; 0; \pi\}$ ist $f_1$ stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf den offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourierreihe für jedes $t \in [-\pi,\pi)$ gegen $\frac{f_1(t+)+f_1(t-)}{2}$. Da die periodische Fortsetzung von $f_1$, wegen $f_1(-\pi) = \lim_{t\to\pi-} f_1(t) = \pi$, stetig ist, stellt die Fourierreihe für jedes $t \in [-\pi,\pi)$ die Funktion $f_1$ dar. Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f_1)\cos(kt)| \leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

und der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ (Teil der konvergenten, positiven Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$) ist die Fourierreihe nach **Satz 7.18 (2)** aus **HM I** gleichmäßig konvergent, da wir die Summanden gliedweise und unabhängig von $t$ nach oben durch eine konvergente Reihe abgeschätzt haben.

**b)** Es gilt

$$c_k(f_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(w-\mathrm{i}k)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{(-1)^k(\mathrm{e}^{w\pi}-\mathrm{e}^{-w\pi})}{2\pi(w-\mathrm{i}k)}, & \text{falls } w \neq \mathrm{i}k, \\ 1, & \text{falls } w = \mathrm{i}k. \end{cases}$$

Mit der Zerlegung $\{-\pi; \pi\}$ ist $f_2$ stückweise glatt, also stetig differenzierbar auf dem offenen Intervall und die einseitigen Grenzwerte der Funktion und ihrer Ableitung an den Intervallgrenzen existieren. Deshalb konvergiert die Fourierreihe nach **Satz 16.2** für jedes $t \in [-\pi,\pi)$ gegen $\frac{f_2(t+)+f_2(t-)}{2}$. Wegen $\frac{f_2(t+)+f_2(t-)}{2} = f_2(t)$ für alle $t \in (-\pi,\pi)$ konvergiert die Fourierreihe dort gegen $f_2$. Damit nun die Fourierreihe in $-\pi$ gegen $f_2$ konvergiert, muss also

$$\mathrm{e}^{-w\pi} = f_2(-\pi) \stackrel{!}{=} \lim_{t\to\pi-} f_2(t) = \mathrm{e}^{w\pi}$$

gelten. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$1 \;=\; \mathrm{e}^{2\pi w} \;=\; \mathrm{e}^{2\pi\mathfrak{Re}(w)}\left(\cos(2\pi\mathfrak{Im}(w)) + \mathrm{i}\sin(2\pi\mathfrak{Im}(w))\right),$$

was nach **Aufgabe 43 b)** von **HM I** und der Injektivität und Positivität der reellen Exponentialfunktion genau dann der Fall ist, wenn $\mathfrak{Im}(w) \in \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{Re}(w) = 0$. D.h., genau dann, wenn $w = \mathrm{i}m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ gilt, konvergiert die Fourierreihe gegen $f_2$. In diesem Fall ist die Konvergenz wegen $c_k(f_2) = 0$, wenn $k \neq m$, und daher

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}$$

trivialerweise gleichmäßig.

**c)** Zunächst bemerken wir, dass Fourierkoeffizienten in dem Sinne linear sind, dass

$$c_k(\alpha f + g) \;=\; \alpha c_k(f) + c_k(g)$$

gilt. Insbesondere gilt dann

$$\begin{aligned} c_k(f_3) \;&=\; c_k\left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{(\cdot)} - \mathrm{e}^{-(\cdot)})\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(c_k(\mathrm{e}^{(\cdot)}) - c_k(\mathrm{e}^{-(\cdot)})\right) \\ &\stackrel{\text{b)}}{=} \frac{(-1)^k}{4\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{1 - \mathrm{i}k} - \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{1 + \mathrm{i}k}\right) = \frac{(-1)^k \sinh(\pi)k}{\pi(k^2+1)}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Damit lauten die reellen Fourierkoeffizienten

$$a_k \;=\; 0 \quad \text{und} \quad b_k \;=\; \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \;=\; \frac{(-1)^{k+1} 2\sinh(\pi)k}{\pi(k^2+1)}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Nun ist $f_3$ bzgl. der Zerlegung $\{-\pi, \pi\}$ stückweise glatt und daher konvergiert für $t \in [-\pi, \pi)$ die zugehörige Fourierreihe gegen $\frac{f_3(t+)+f_3(t-)}{2}$. Wegen

$$f_3(-\pi) \;=\; -\sinh(\pi) \;\neq\; \sinh(\pi) \;=\; \lim_{t\to\pi-} f_3(t)$$

konvergiert die Fourierreihe nicht in $-\pi$ gegen $f_3$ und daher konvergiert die Fourierreihe auch nicht gleichmäßig.

## Aufgabe 9 (Übung)

**a)** Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ differenzierbar mit $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie

$$\widehat{f'}(k) = \mathrm{i}k\hat{f}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

**b)** Sei $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)} \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |k^n \hat{f}(k)| < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Lösungsvorschlag

**a)** Für $k=0$ gilt wegen der Periodizität von $f$

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi} = 0 = \mathrm{i}\cdot 0\cdot \hat{f}(0).$$

Für $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\widehat{f'}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\underbrace{[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}]_{t=-\pi}^{\pi}}_{=0,\text{ da }2\pi\text{-per.}} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{i}k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}k\hat{f}(k).$$

**b)** Sei $n\in\mathbb{N}$. Wenden wir die Formel aus **a)** für die Fourierkoeffizienten von $f^{(n)}$ $n$ Mal an, so erhalten wir

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = \mathrm{i}k\widehat{f^{(n-1)}}(k) = \ldots = (\mathrm{i}k)^n\hat{f}(k) \qquad (k\in\mathbb{Z}).$$

Wegen $f^{(n)}\in C_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ gilt $\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f^{(n)}}(k)|<\infty$, denn: Aus **Satz 16.4** (bzw. auch **15.9**) folgt die Konvergenz von $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f^{(n)}}(k)|^2$, also die Beschränktheit von der Folge $(|\widehat{f^{(n)}}(k)|^2)_{k\in\mathbb{Z}}$ und somit auch von $(|\widehat{f^{(n)}}(k)|)_{k\in\mathbb{Z}}$. Somit gilt

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}|k^n\hat{f}(k)| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f^{(n)}}(k)| < \infty.$$

Dies bedeutet, dass die Fourierkoeffizienten schneller abfallen als jede Potenz von $\frac{1}{|k|}$.

### Aufgabe 10 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

**a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$,

**b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+a}$ für ein festes $a>0$.

### Lösungsvorschlag

**a)** Nach **Aufgabe 8 a)** lauten die Fourierkoeffizienten der Funktion $f_1:[-\pi,\pi)\to\mathbb{C}$, definiert durch $f_1(t)=|t|$ gerade

$$a_0(f_1)=\pi, \qquad a_k(f_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } k=2m,\\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{für } k=2m-1\end{cases}$$

für alle $k\in\mathbb{N}$. Da $f_1$ in allen Punkten durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, gilt

$$0 = f_1(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Folglich ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**b)** Nach **Aufgabe 8 b)** lauten die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion $f_2 : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, definiert durch $f_2(t) = \mathrm{e}^{wt}$ für ein $0 \neq w \in \mathbb{R}$, gerade

$$c_k(f_2) \;=\; \frac{(-1)^k(\mathrm{e}^{w\pi} - \mathrm{e}^{-w\pi})}{2\pi(w - \mathrm{i}k)} \;=\; \frac{(-1)^k \sinh(w\pi)}{\pi(w^2+k^2)}(w + \mathrm{i}k).$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Mithilfe der Umrechnungsformeln für die reellen Fourierkoeffizienten erhalten wir gerade

$$a_k(f_2) \;=\; c_k + c_{-k} \;=\; \frac{2(-1)^k \sinh(w\pi)w}{\pi(w^2+k^2)}, \quad b_k(f_2) \;=\; \mathrm{i}(c_k - c{-}k) \;=\; -\frac{2(-1)^k \sinh(w\pi)k}{\pi(w^2+k^2)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt wegen der Stetigkeit von $f_2$ in 0 (und der stückweisen Glattheit von $f_2$)

$$1 = f_2(0) = c_0(f_2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f_2) = \frac{\sinh(w\pi)}{\pi w} + \frac{2w\sinh(w\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{w^2+k^2}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{w^2+k^2} = \frac{\pi}{2w\sinh(w\pi)} - \frac{1}{2w^2}$$

Mit $w = \sqrt{a}$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}\sinh(\sqrt{a}\pi)} - \frac{1}{2a}$$

## Aufgabe 11 (Übung)

**a)** Folgt aus $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und $f$ differenzierbar, dass $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$?

**b)** Wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-periodisch und differenzierbar ist, ist dann auch $g'$ $2\pi$-periodisch?

**c)** Seien $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Ist $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$?

**d)** Seien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar und $g'$ $2\pi$-periodisch. Ist $g$ $2\pi$-periodisch?

### Lösungsvorschlag

**a)** Definiere $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ vermöge

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \sin(t), & \text{falls } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sin(2t), & \text{falls } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $f \in C_{per}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Doch gilt

$$f'(-\pi+) \;=\; -1 \;\neq\; -2 \;=\; f'(\pi-),$$

d.h. insbesondere $f' \notin C_{per}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

**b)** Sei nun andererseits $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-periodisch und differenzierbar. Dann gilt

$$g'(x+2\pi) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+2\pi+h) - g(x+2\pi)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x),$$

d.h., $g'$ ist auch $2\pi$-periodisch.

**c)** Definiere $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto 2x - \cos(x)$. Es ist

$$f(-\pi) = -2\pi + 1 \neq 2\pi + 1 = f(\pi),$$

d.h. $f \notin C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Außerdem gelten $f'(x) = 2 + \sin(x)$ und $f'(-\pi) = 2 = f'(\pi)$, d.h. $f' \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

**d)** Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto 2x - \cos(x)$. Mit **c)** folgt, dass $g$ nicht $2\pi$-periodisch ist, jedoch $g'$ $2\pi$-periodisch ist.

## Aufgabe 12 (Tutorium)

Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$$

die Fourierreihe einer Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$?
*Hinweis:* Benutzen Sie die Besselsche Ungleichung.

### Lösungsvorschlag

Angenommen, es existierte eine Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, deren reelle Fourierkoeffizienten durch $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k \in \mathbb{N}$) gegeben seien. Da die Funktionen $e_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ sind, folgt nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty,$$

da stetige Funktionen (wie $x \mapsto |f(x)|^2$) Riemann-integrierbar auf kompakten Intervallen sind. Für die Fourierkoeffizienten gilt

$$\hat{f}(0) = 0, \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{k}}, \quad \hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k) = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{k}}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} |\hat{f}(k)|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} (|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2k}.$$

Somit würde die harmonische Reihe konvergieren, ein Widerspruch. Also existiert keine solche Funktion.