

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

3. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 13 (ÜBUNG)

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_2)$ mit

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f \in \mathcal{C}[a, b]$$

kein Banachraum ist.

AUFGABE 14 (TUTORIUM)

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von A , indem Sie

- (i) die Regel von Sarrus verwenden.
- (ii) nach der ersten Zeile entwickeln.
- (iii) durch Spaltenumformungen einen Einheitsvektor erzeugen und nach diesem entwickeln.

b) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C_α regulär?

AUFGABE 15 (ÜBUNG)

Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\mathcal{P}$ die Menge aller auf $[a, b]$ definierten $\mathbb{K}$ -wertigen Polynome. Der Weierstraßsche Approximationssatz lautet: Für alle stetigen Funktionen $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom $P \in \mathcal{P}$ mit $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. Zeigen Sie damit:

- a) $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.
- b) Für alle $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b]; \mathbb{K})$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.
- c) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, so konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ wie in AUFGABE 13 definiert sei.
- d) Für alle $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{K})$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b]; \mathbb{K})$ mit $g(a) = g(b) = 0$ und $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

AUFGABE 16 (TUTORIUM)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\begin{cases} (\alpha - 2) \cdot x + (\alpha - 1) \cdot y - (\alpha - 1) \cdot z = 0 \\ (6 - 3\alpha) \cdot x + (\alpha^2 - 1) \cdot y + (\alpha - 1) \cdot z = 0 \\ (\alpha^2 - \alpha - 2) \cdot x + \alpha(\alpha - 1) \cdot y - \alpha(\alpha - 1) \cdot z = \alpha - 1. \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α .
- Finden Sie für diejenigen α , für welche obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösung mittels der Cramerschen Regel.

AUFGABE 17 (ÜBUNG)

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie:

- Für jede stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen f konvergiert. *Hinweis:* Verwenden Sie den Weierstraßschen Approximationssatz.
- Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion und gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist f bereits selbst ein Polynom.

AUFGABE 18 (TUTORIUM)

- Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

- Sei $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Ta = a \times b,$$

- die Adjungierte T^* ,
- $\text{Kern}(T)$,
- $\text{Bild}(T)$.

Hinweis: Verwenden Sie **AUFGABE 1 a**).