Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

SS 2016
13.05.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2)$ mit

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in \mathcal{C}[a,b]$$

kein Banachraum ist.

Lösungsvorschlag

Da wir auf $[a,b]$ definierte Funktionen mittels $\tilde{f}(x) := f(a + (b-a)\frac{x+1}{2})$ mit einer auf $[-1,1]$ defnierten Funktion identifizieren können, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a = -1$ und $b = 1$ gelten. Wir definieren die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx & , -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & , \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Jede dieser Funktionen liegt offensichtlich in $\mathcal{C}[-1,1]$. Wir zeigen, dass die Folge eine Cauchyfolge in $(\mathcal{C}[-1,1], \|\cdot\|_2)$ ist. Für $m \geqslant n$ gilt

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} -1 - nx & , -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{m}, \\ (m-n)x & , -\frac{1}{m} < x < \frac{1}{m}, \\ 1 - nx & , \frac{1}{m} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen unterscheiden sich demnach nur auf $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ und dort um maximal 1 Deshalb gilt

$$\|f_m - f_n\|_2^2 \leqslant \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wäre $(\mathcal{C}[-1,1], \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum, so müsste nun die eine stetige Grenzfunktion existieren, gegen die (f_n) in der $\|\cdot\|$-Norm konvergiert. Eine Funktion, gegen die (f_n) konvergiert, ist durch die unstetige Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & , 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

gegeben. Dies liegt an

$$\|f_n - f\|_2^2 = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 \,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{\frac{1}{n}} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Gäbe es eine weitere Funktion g, die dies erfüllt, so wäre

$$\|f-g\|_2 \leqslant \|f-f_n\|_2 + \|f_n - g\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $\|f-g\|_2 = 0$ und somit auch

$$0 = \|f-g\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|^2.$$

Somit ist auch jeder Teil dieses Integrals 0, da der Integrand nicht-negativ ist. Wäre $g(x_0) \neq 1$ für ein $x_0 > 0$, so wäre $|f(x)-g(x)|^2$ in einer Umgebung von x_0 positiv und das Integral somit ebenfalls (da g stetig, vgl. Lösung zu **Aufgabe 5**). Gleiches gilt für $g(x_0) \neq -1$ für ein $x_0 < 0$. Also gilt $g(x) = -1$ für $x < 0$ und $g(x) = 1$ für $x > 0$, womit g nicht stetig in 0 sein kann.

Aufgabe 14 (Tutorium)

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von A, indem Sie

(i) die Regel von Sarrus verwenden.

(ii) nach der ersten Zeile entwickeln.

(iii) durch Spaltenumformungen einen Einheitsvektor erzeugen und nach diesem entwickeln.

b) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C_α regulär?

Lösungsvorschlag

a) (i) Die Regel von Sarrus liefert

$$\begin{aligned}\det(A) &= 2\cdot 1\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-1)\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot(-1) \\ &= -4 + 2 + 4 - 4 - 4 + 2 = -4.\end{aligned}$$

(ii) Entwickeln nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot((-2)-(-1)) - 2\cdot(2-1) + 4\cdot(1-1) = -2-2 = -4.\end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. Z.}}{=} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

b) Mit den Rechenregeln für Determinanten folgt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Laut Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(A) = -6$. Weiter gilt

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 2. Z.}}{=} (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 18 & 11 \\ -1 & 7 & 3 \\ 0 & 27 & 14 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. S.}}{=} (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 18 & 11 \\ 27 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 54 - 99 = -45.$$

Zuletzt gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 2. S.}}{=} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha-4 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Z.}}{=} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha-4 \end{vmatrix} = (\alpha-4) - 1 = \alpha - 5,$$

womit C genau dann regulär ist, wenn $\alpha \neq 5$ gilt.

Aufgabe 15 (Übung)

Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R};\mathbb{C}\}$, $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\mathcal{P}$ die Menge aller auf $[a,b]$ definierten $\mathbb{K}$-wertigen Polynome. Der *Weierstraßsche Approximationssatz* lautet: Für alle stetigen Funktionen $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom $P \in \mathcal{P}$ mit $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. Zeigen Sie damit:

a) $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.

b) Für alle $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in \mathcal{C}^\infty([a,b];\mathbb{K})$ mit $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$.

c) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ wie in **Aufgabe 13** definiert sei.

d) Für alle $f \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in \mathcal{C}^\infty([a,b];\mathbb{K})$ mit $g(a) = g(b) = 0$ und $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.

Lösungsvorschlag

a) Definiere $f : [a,b] \to \mathbb{K}, x \mapsto \sin(x)$. f ist offensichtlich (!) kein Polynom. Dann existiert nach dem Weierstraßschen Approximationssatz eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, die auf $[a,b]$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, d.h. gleichmäßig, gegen f konvergiert. Wie im Falle von $\mathbb{R}$ in **HM I** folgt, dass wegen der Konvergenz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist. Da Grenzwerte im normierten Raum $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ eindeutig sind, kann $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen ein Polynom konvergieren. Damit ist $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$ kein Banachraum.

b) Wegen $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}^\infty([a,b];\mathbb{K})$ ist die Aussage klar.

c) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$. Da $(\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ nach Vorlesung ein Banachraum ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein f in $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{K})$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}} \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

Dann gilt

$$\|f_n - f\|_2 = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b \|f_n - f\|_\infty^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < \left((b-a)\frac{\varepsilon^2}{b-a}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

für alle $n \geqslant n_0$, wie zu zeigen war.
Bemerkung: Wie wir gesehen haben, impliziert Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_2$. Die Umkehrung gilt jedoch **nicht**, wie man dem Beispiel von **Aufgabe 13** entnehmen kann.

d) Ähnlich wie in **Aufgabe 13** seien o.B.d.A. $a = 0$ und $b = 1$. Seien $f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{K})$ und $\varepsilon > 0$. Definiere für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) := \begin{cases} nf(\frac{1}{n})x, & \text{falls } 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \\ f(x), & \text{falls } \frac{1}{n} \leqslant x < 1 - \frac{1}{n} \\ -nf(1-\frac{1}{n})(x-1), & \text{falls } 1 - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Offensichtlich ist f_n stetig und es gilt $f_n(0) = f_n(1) = 0$. Zunächst einmal berechnen wir

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} \left|nxf\left(\frac{1}{n}\right) - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \left|-n(x-1)f\left(1-\frac{1}{n}\right) - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x.$$

Es gelten

$$\left|nxf\left(\frac{1}{n}\right)-f(x)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \quad \text{und} \quad \left|-n(x-1)f\left(1-\frac{1}{n}\right)-f(x)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

Das ergibt zusammen mit obiger Abschätzung

$$\|f_n - f\|_2^2 \leqslant \frac{8}{n}\|f\|_\infty^2.$$

Insbesondere gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_{n_0} - f\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach **b)** existiert nun ein $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty([0,1];\mathbb{K})$ mit $\|f_{n_0} - \tilde{g}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{6}$. Definiere $g(x) := \tilde{g}(x) - (1-x)\tilde{g}(0) - x\tilde{g}(1)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f-g\|_2 &\leqslant \|f-f_{n_0}\|_2 + \|f_{n_0}-\tilde{g}\|_2 + \|(1-x)\tilde{g}(0)\|_2 + \|x\tilde{g}(1)\|_2 \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|f_{n_0}-\tilde{g}\|_\infty + \underbrace{|\tilde{g}(0)-f_{n_0}(0)|}_{\leqslant \|f_{n_0}-\tilde{g}\|_\infty}\cdot\|1-x\|_2 + \underbrace{|\tilde{g}(1)-f_{n_0}(1)|}_{\leqslant \|f_{n_0}-\tilde{g}\|_\infty}\cdot\|x\|_2,.\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Abschätzung $\|h\|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-0}}\|h\|_\infty$ sowie $f_{n_0}(0) = f_{n_0}(1) = 0$ verwendet haben. Mithilfe von

$$\|x\|_2^2 = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} = \int_0^1 (1-x)^2 \, \mathrm{d}x = \|1-x\|_2^2$$

und der letzten Abschätzung erhalten wir schließlich

$$\|f-g\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\|f_{n_0}-\tilde{g}\|_\infty \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon,$$

wie zu zeigen war.

Aufgabe 16 (Tutorium)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch:

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha-2)\cdot x + \quad (\alpha-1)\cdot y - \quad (\alpha-1)\cdot z &= \quad 0 \\ (6-3\alpha)\cdot x + \ (\alpha^2-1)\cdot y + \quad (\alpha-1)\cdot z &= \quad 0 \\ (\alpha^2-\alpha-2)\cdot x + \alpha(\alpha-1)\cdot y - \alpha(\alpha-1)\cdot z &= \alpha-1. \end{aligned}\right.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α.

b) Finden Sie für diejenigen α, für welche obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, die Lösung mittels der Cramerschen Regel.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\det(A_\alpha) &= \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & (\alpha+1)(\alpha-1) & (\alpha-1) \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. S.}}{=} (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & \alpha+2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2).
\end{aligned}
$$

Die Matrix A_α ist also invertierbar für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

b) Cramersche Regel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar, $A = (a_1, \dots, a_n)$, so sind die Komponenten der Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ (mit $b \in \mathbb{K}^n$) gegeben durch

$$
x_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \dots, n).
$$

Um die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems zu berechnen, benötigen wir also die folgenden Determinanten:

$$
D_1 := \begin{vmatrix} 0 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 0 & (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = (\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^3(\alpha+2).
$$

$$
D_2 := \begin{vmatrix} \alpha-2 & 0 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & 0 & \alpha-1 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = -(\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-2 & -(\alpha-1) \\ -3(\alpha-2) & \alpha-1 \end{vmatrix} = 2(\alpha-1)^2(\alpha-2).
$$

$$
\begin{aligned}
D_3 := \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & 0 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) & 0 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{vmatrix} &= (\alpha-1) \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4).
\end{aligned}
$$

Für die Komponenten des Lösungsvektors folgt also

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{D_1}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^3(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \\
x_2 &= \frac{D_2}{\det(A_\alpha)} = \frac{2(\alpha-1)^2(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{2}{\alpha+2} \\
x_3 &= \frac{D_3}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha+4}{\alpha+2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 17 (Übung)

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie:

a) Für jede stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen f konvergiert. *Hinweis:* Verwenden Sie den Weierstraßschen Approximationssatz.

b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ eine Funktion und gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist f bereits selbst ein Polynom.

Lösungsvorschlag

a) Sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{K})$. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom P_n derart, dass

$$\sup_{|x| \leqslant n} |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$$

gilt. Dann gibt es zu $x \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > x$. Es gilt dann für alle $n \geqslant N$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \sup_{|y| \leqslant n} |f(y) - P_n(y)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Insbesondere konvergiert $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ eine solche Funktion, dass es eine Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen gibt, die auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Insbesondere ist $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy bezüglich $\|\cdot\|_\infty := \sup_{\mathbb{R}} |\cdot|$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geqslant n_0$

$$\|P_n - P_{n_0}\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leqslant 1$$

gilt. Offensichtlich ist $Q_n := P_n - P_{n_0}$ ein Polynom, welches wegen $\|Q_n\|_\infty \leqslant 1$ konstant sein muss (!), d.h., $Q_n = c_n$ für eine reelle Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen $|c_n - c_m| = \|P_n - P_m\|_\infty$ eine Cauchyfolge und daher gegen ein $c \in \mathbb{K}$ konvergent ist, konvergiert $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $P_{n_0} + c$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes gilt $f = P_{n_0} + c$. Insbesondere ist f ein Polynom. *Bemerkung:* Wir haben verwendet, dass der Satz von Bolzano-Weierstraß auch in $\mathbb{C}$ gilt. Dieser lässt sich analog zum reellen Fall beweisen.

Bemerkungen:

(i) Im Gegensatz zum Satz von Taylor muss eine Funktion nicht differenzierbar sein, um durch ein Polynom approximiert werden zu können. Außerdem approximiert das Taylorpolynom im Falle der Konvergenz die Funktion lediglich innerhalb des Konvergenzbereichs der Taylorreihe.

(ii) Eine Taylorreihe konvergiert niemals auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion, es sei denn, sie ist bereits ein Polynom. Dies widerspricht nicht dem Fakt, dass es Taylorreihen mit Konvergenzradius ∞ gibt (z.B. exp, sin, etc.). Diese konvergieren lediglich auf Kompakta gleichmäßig.

Aufgabe 18 (Tutorium)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} 1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\ 0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\ \vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

b) Sei $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad Ta = a \times b,$$

(i) die Adjungierte T^*,

(ii) $\mathrm{Kern}(T)$,

(iii) $\mathrm{Bild}(T)$.

Hinweis: Verwenden Sie **Aufgabe 1 a)**.

Lösungsvorschlag

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Für $n = 1$ gilt:

$$\det(B_1(z)) = \begin{vmatrix} 1+z^2 \end{vmatrix} = 1 + z^2$$

Für $n = 2$ gilt

$$\det(B_2(z)) = \begin{vmatrix} 1+z^2 & z \\ z & 1+z^2 \end{vmatrix} = (1+z^2)^2 - z^2 = 1 + 2z^2 + z^4 - z^2 = 1 + z^2 + z^4$$

Für alle $n > 2$ gilt nach dem Determinantenentwicklungssatz

$$
\begin{aligned}
\det(B_n(z)) &= \begin{vmatrix}
1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \\
&= (1+z^2)\begin{vmatrix}
1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\
&\quad -z\begin{vmatrix}
z & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\
&= (1+z^2)\det(B_{n-1}(z)) \\
&\quad -z^2\begin{vmatrix}
1+z^2 & z & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
z & 1+z^2 & z & 0 & & & \vdots \\
0 & z & 1+z^2 & z & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & z & 1+z^2 & z & 0 \\
\vdots & & & 0 & z & 1+z^2 & z \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & z & 1+z^2
\end{vmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-2)\times(n-2)} \\
&= (1+z^2)\det(B_{n-1}(z)) - z^2\det(B_{n-2}(z))
\end{aligned}
$$

Es ist etwa:

$$
\begin{aligned}
\det(B_3(z)) &= (1+z^2)\det(B_2(z)) - z^2\det(B_1(z)) \\
&= (1+z^2)(1+z^2+z^4) - z^2(1+z^2) = (1+z^2)(1+z^4) \\
&= 1+z^2+z^4+z^6
\end{aligned}
$$

Dies legt die Vermutung

$$\det(B_n(z)) = \sum_{m=0}^{n} z^{2m}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nahe. Diese beweisen wir per Induktion:

IA ($n = 1$, $n = 2$): Siehe oben.

IS: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \le n$ gelte die Behauptung (IV)

$$\det(B_k(z)) = \sum_{m=0}^{k} z^{2m}.$$

O.B.d.A. ist $n \ge 2$ (ansonsten benutze (IA)). Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
\det(B_{n+1}(z)) &\overset{\text{s.o.}}{=} (1+z^2)\det(B_n(z)) - z^2\det(B_{n-1}(z)) \\
&\overset{\textbf{(IV)}}{=} (1+z^2)\sum_{m=0}^{n} z^{2m} - z^2\sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} z^{2m} + z^2 z^{2n} + z^2\sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} - z^2\sum_{m=0}^{n-1} z^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n} z^{2m} + z^{2(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} z^{2m}
\end{aligned}$$

b) (i) Seien $a, c \in \mathbb{R}^3$. Es gilt:

$$(Ta|c) = (a \times b|c) \overset{\textbf{17.10}}{=} \det(a,b,c) \overset{\textbf{17.2}}{=} -\det(c,b,a) \overset{\textbf{17.10}}{=} -(c \times b|a) \overset{\textbf{(S1)}}{=} (a|-Tc) = (a|T^*c)$$

Also ist $T^* = -T$.

(ii) Nach **17.11 (5)** gilt für alle $a \in \mathbb{R}^3$

$$0 = Ta = a \times b \Leftrightarrow a, b \text{ linear abhängig},$$

also ist $\operatorname{Kern}(T) = \operatorname{lin}(\{b\})$.

(iii) Nach **Aufgabe 1 a)** gilt $\operatorname{Bild}(T) = \operatorname{Kern}(T^*)^\perp$. Mit (i) und (ii) folgt

$$\operatorname{Bild}(T) = \operatorname{Kern}(T)^\perp = \operatorname{lin}(\{b\})^\perp = \left\{a \in \mathbb{R}^3 : (a|b) = 0\right\}.$$