Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

SS 2016
20.05.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Übung)

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine solche orthogonale Matrix S an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. **Satz 18.2** der Vorlesung). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1-ter Zeile}}{=}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)
\end{aligned}$$

Nach Satz 18.2 der Vorlesung sind die Eigenwerte von A gerade die Nullstellen von p_A, also $1, 2$ und 3.

Nach Satz 18.1 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von A der Eigenraum $E_A(\lambda)$ gegeben durch

$$E_A(\lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I_3).$$

Wir berechnen diese mithilfe des Gaußalgorithmus und des (-1)-Tricks:

- $E_A(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(1) = \operatorname{lin}\{v_1\}$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

- $E_A(2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot\sqrt{2} \\ + \\ \mid \cdot\sqrt{2} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(2) = \operatorname{lin}\{v_2\}$ mit

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } b_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- $E_A(3)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $E_A(2) = \operatorname{lin}\{v_3\}$ mit

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Nach Satz 18.8 der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen immer orthogonal zueinander. Die normierten Vektoren b_1, b_2, b_3 bilden deshalb die orthogonale Matrix

$$S = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Es gilt

$$A = SDS^T \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Definiere

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

sowie $W = SD'S^T$. Dann ist in der Tat

$$W^2 = (SD'S^T)^2 = SD' \underbrace{S^T S}_{=I_3} D'S^T = SD'D'S^T = S(D')^2 S^T = SDS^T = A.$$

Ausrechnen liefert:

$$W = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ -1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} & 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & \sqrt{2} - \sqrt{6} \\ \sqrt{6} - \sqrt{2} & \sqrt{2} - \sqrt{6} & 2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20 (Tutorium)

Betrachten Sie

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und geben Sie eine solche orthogonale Matrix T an, dass $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt hat.

b) Berechnen Sie B^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom (vgl. Abschnitt 18.2 der Vorlesung). Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{(D2)}{=} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ \text{4-ten Zeile}}}{=} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{3-ten Zeile}}{=}} (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} (4-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3(3-\lambda-3) = -\lambda(4-\lambda)^3
\end{aligned}
$$

Nach Satz 18.2 der Vorlesung sind die Eigenwerte von B gerade die Nullstellen von p_B, also 0 und 4.

Nach Satz 18.1 der Vorlesung ist für jeden Eigenwert λ von B der Eigenraum $E_B(\lambda)$ gegeben durch

$$E_B(\lambda) = \mathrm{Kern}(B - \lambda I_4).$$

Wir berechnen diese mit Hilfe des Eliminationsverfahrens nach Gauß und des (-1)-Ergänzungstricks:

- $E_B(0)$:

$$
\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \end{matrix}
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Also ist $E_B(0) = \mathrm{lin}\{v_1\}$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- $E_B(4)$:

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \mid \cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Also ist $E_B(4) = \operatorname{lin}\{\vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ mit

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setze

$$v_2 = \vec{q}_2, \quad v_3 = \vec{q}_4 - \vec{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \vec{q}_4.$$

Dann ist auch $E_B(4) = \operatorname{lin}\{v_2, v_3, v_4\}$.

Nach Satz 18.8 der Vorlesung sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen immer orthogonal zueinander. Wir brauchen also nur den berechneten Erzeuger v_2, v_3, v_4 von $E_B(4)$ dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zu unterziehen:

Die ersten beiden Vektoren sind bereits orthogonal und müssen nur noch normiert werden:

$$b_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ferner berechnet man

$$b_4 = v_4 - \underbrace{(v_4|b_2)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} b_2 - \underbrace{(v_4|b_3)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und } \|b_4\| = 1.$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$T = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$B = TDT^T$$

nach Satz 18.8 der Vorlesung.

(b) Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$B^k = (TDT^T)^k = TD\underbrace{T^{-1}T}_{=I_4}DT^{-1}\cdots TDT^{-1} = TD^kT^T$$

Wegen $D^k = 4^{k-1}D$ folgt:

$$B^k = T4^{k-1}DT^T = 4^{k-1}TDT^T = 4^{k-1}B$$

Aufgabe 21 (Übung)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche alle Eigenwerte positiv sind.

b) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 17 & 16 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

ähnliche Matrizen. Finden Sie die möglichen Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag

a) Wir versuchen die Eigenwerte der Matrix A_α abzuschätzen. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(\lambda) &= \det(A_\alpha - I_3\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (1-\lambda)(8-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - \alpha^2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((8-\lambda)(1-\lambda) - (4+\alpha^2)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 4 - \alpha^2) \end{aligned}$$

Daraus lesen wir ab, dass $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert von A_α ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Also ist A_α, nach der Charakterisierung im Abschnitt 18.12 der Vorlesung, nie negativ (semi-) definit. Die zwei anderen Eigenwerte von A_α sind die Nullstellen des Polynoms $\lambda^2 - 9\lambda + 4 - \alpha^2$ und somit gegeben durch

$$\lambda_2 = \frac{9 + \sqrt{81 - 4(4-\alpha^2)}}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{9 - \sqrt{81 - 4(4-\alpha^2)}}{2}$$

Wegen $\lambda_2 > 0$ müssen wir lediglich das Vorzeichen von λ_3 untersuchen. Ablesen liefert: Genau dann, wenn $|\alpha| < 2$ ist, gilt $\lambda_3 > 0$, da sonst unter der Wurzel ein Term >81 steht.

b) Die Spur und die Determinante einer Matrix sind invariant unter einer Ähnlichkeitstransformation. Sind A und B also ähnlich, so haben sie dieselbe Spur und Determinante. Es gilt

$$\mathrm{Spur}(A) = 1 + 4 + 7 = 12, \qquad \mathrm{Spur}(B) = \frac{17 + 8 + \alpha}{2} = \frac{25}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Somit können A und B nur ähnlich sein, wenn $\alpha = -1$ gilt. Zudem gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) & \cdot(-5) \\ + & \\ & + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \det(B) &= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 17 & 16 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ \beta & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. Z.}}{=} (-1)^{1+3} \cdot \beta \cdot \begin{vmatrix} 16 & 15 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 17 & 16 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -8\beta + 8 = 8(1-\beta), \end{aligned}$$

womit $\beta = 1$ gelten muss. Da dies die einzige Möglichkeit ist, sind die Matrizen nach Aufgabenstellung für $\alpha = -1$, $\beta = 1$ ähnlich.

Aufgabe 22 (Tutorium)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar? Ermitteln Sie, falls möglich, reguläre Matrizen S_A bzw. S_B so, dass $S_A^{-1} A S_A$ bzw. $S_B^{-1} B S_B$ Diagonalgestalt hat.

Lösungsvorschlag

Für die Matrix A gilt

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Z.}}{=} (18-\lambda) \begin{vmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (18-\lambda)((20-\lambda)(16-\lambda)+4) = (18-\lambda)(\lambda^2 - 36\lambda + 324) = (18-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Somit ist $\lambda = 18$ der einzige Eigenwert von A. Er hat die algebraische Vielfachheit 3. Nach Vorlesung ist der Eigenraum $E_A(18)$ gerade $\mathrm{Kern}(A - 18 I_3)$. Um diesen zu berechnen, betrachten wir

$$A - 18 I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & \cdot(-\frac{1}{2}) & \mid \cdot \frac{1}{4} \\ + & & \\ & + & \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem (-1)-Trick ergibt sich

$$E_A(18) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Der Eigenwert 18 hat somit die geometrische Vielfachheit 2. Da diese nicht mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt, ist A nach Satz 18.6 nicht diagonalisierbar, das heißt die geforderte Matrix S_A existiert nicht.
Für die Matrix B gilt

$$\begin{aligned}
p_B(\lambda) = \begin{array}{c} \cdot(-\lambda) \qquad\qquad + \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \end{array} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 2 & -\lambda & 2(1-\lambda) \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Entw. 3. Z.}}{=} (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} \\
&= -2(1-\lambda) + \lambda^2(1-\lambda) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda).
\end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte von B gegeben durch 1, $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Für die Eigenräume berechnen wir $\operatorname{Kern}(B - \lambda I_3)$, wobei λ die drei Eigenwerte seien. Es folgt

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ \quad \mid \cdot(-1) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem (-1)-Trick folgt, dass

$$E_B(1) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
B - \sqrt{2} I_3 &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \qquad + \\ + \\ \cdot 2 \quad \cdot(1-\sqrt{2}) \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ + \\ \cdot\sqrt{2} \end{array} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit dem (-1)-Trick folgt

$$E_B(\sqrt{2}) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

und analog

$$E_B(-\sqrt{2}) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Die geometrischen Vielfachheiten der drei Eigenwerte sind dementsprechend auch 1. Somit stimmen diese mit den algebraischen Vielfachheiten überein und B ist diagonalisierbar. Laut Vorlesung (nach Satz 18.6) erhalten wir eine Matrix S_B, indem wir die Eigenvektoren als Spalten benutzen. S_B ist also beispielsweise gegeben durch

$$S_B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt dann

$$S_B^{-1} B S_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Man nennt A und B *simultan diagonalisierbar*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Zeigen Sie:

a) Sind A und B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

b) Gilt $AB = BA$ und haben überdies alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit eins, so sind A und B simultan diagonalisierbar.

Hinweis: Man kann ebenfalls zeigen, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, falls AB = BA gilt sowie A und B diagonalisierbar sind.

Lösungsvorschlag

a) Gelte nach Voraussetzung etwa $A = SD_1S^{-1}$ bzw. $B = SD_2S^{-1}$ Diagonalmatrizen $D_1, D_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Es folgt:

$$AB = SD_1 \underbrace{S^{-1}S}_{I_n} D_2S^{-1} = SD_1D_2S^{-1} = SD_2D_1S^{-1} = SD_1 \underbrace{S^{-1}S}_{I_n} D_2S^{-1} = BA$$

b) Nach Abschnitt 18.3 der Vorlesung gilt für jeden Eigenwert λ von A

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n,$$

wobei $m_g(\lambda)$ bzw. $m_a(\lambda)$ die geometrische bzw. algebraische Vielfachheit des Eigenwertes bezeichnen. Nach Voraussetzung ist also $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$ für jeden Eigenwert λ von A. Nach Satz 18.8 der Vorlesung ist also A diagonalisierbar. Seien etwa $b_1, \dots, b_n$ linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A. Wegen $m_g(\lambda_j) = 1$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, ist $E_A(\lambda_j) = \operatorname{lin}\left\{b_j\right\}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Mit der Voraussetzung der Vertauschbarkeit folgt

$$ABb_j = BAb_j = \lambda_j Bb_j,$$

also $Bb_j \in E_A(\lambda_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Wegen $\dim(E_A(\lambda_j)) = m_g(\lambda_j) = 1$, existiert ein $\mu_j \in \mathbb{C}$ mit $Bb_j = \mu_j b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Damit sind die Eigenwerte von B gegeben durch $\mu_1, \dots, \mu_n$ mit den Eigenvektoren $b_1, \dots, b_n$. Mit $S = (b_1, \dots, b_n)$ haben sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt.

Aufgabe 24 (Tutorium)

a) Seien $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$B_\beta = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2} & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, für welche alle Eigenwerte positiv sind.

b) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie ihre Antwort.

(i) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

(ii) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so existiert ein reeller Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von A zum Eigenwert λ.

(iii) Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A sowie $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B, so ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von AB.

(iv) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2.

(v) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und n gerade/ungerade, so besitzt A einen reellen Eigenwert.

(vi) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so gilt $|\lambda| = 1$.

Lösungsvorschlag

a) Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix B_β. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_{B_\beta}(\lambda) &= \det(B_\beta - I_3\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda \end{vmatrix} \cdot(-1) \\
&= \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\beta+\lambda & \beta-\lambda \end{vmatrix} \overset{(D2)}{=} (\beta-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3}-\lambda & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (\beta-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix} \cdot(-1) \\
&= (\beta-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\beta-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\beta-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (\beta-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)
\end{aligned}$$

Also ist sind die Eigenwerte von B gegeben durch $\beta, 2$ und 3. D.h., genau dann, wenn $\beta > 0$ ist, sind alle Eigenwerte von B positiv.

b) (i) Die Aussage ist wahr. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Mit $\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gilt nun

$$A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\,\overline{x},$$

womit $\overline{x}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist. Die erste Gleichheit lässt sich dabei einfach mit der Definition des Matrix-Vektorprodukts und der Tatsache, dass A reelle Einträge hat, nachrechnen. Alternativ lässt sich hier **Aufgabe 11 b)** aus **HM 1** anwenden: Da A reell ist, ist das zugehörige charakteristische Polynom p reell. Dann ist λ genau dann eine Nullstelle von p, wenn $\overline{\lambda}$ es ist. Damit ist λ genau dann Eigenwert von A, wenn $\overline{\lambda}$ es ist.

(ii) Die Aussage ist wahr. Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Ist $\operatorname{Re} v = 0$, also $v = \mathrm{i}w$ für ein $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ist $\mathrm{i}v$ ein reeller Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Ist $\operatorname{Re} v \neq 0$, So ist $\operatorname{Re} v = \frac{v+\overline{v}}{2}$ ein reeller Eigenvektor zum Eigenwert λ, denn nach **a)** ist neben v auch $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \overline{\lambda}$, somit auch $\operatorname{Re} v$ als Linearkombination dieser beiden.

(iii) Die Aussage ist falsch. Seien etwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann haben beide Matrizen das charakteristische Polynom $\lambda(\lambda - 1)$ und somit die Eigenwerte 0 und 1. Ein mögliches Produkt zweier Eigenwerte ist somit 1, was jedoch kein Eigenwert von $AB = 0$ ist.

(iv) Sei $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$A^2 v = A(Av) = \lambda A v = \lambda^2 v,$$

womit v ebenfalls ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2 ist.

(v) Ist n gerade, so ist die Aussage falsch. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ und somit nur die nicht-reellen Eigenwerte $\pm\mathrm{i}$.
Ist n ungerade, so ist die Aussage wahr, denn das charakteristische Polynom ist reell und hat einen ungeraden Grad. So ein Polynom besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

(vi) Die Aussage ist wahr. Für unitäre Matrizen gilt $(Ax|Ax) = (x|x)$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und v ein zugehöriger Eigenvektor. Dann folgt

$$(v|v) = (Av|Av) = (\lambda v|\lambda v) = \lambda\overline{\lambda}(v|v) = |\lambda|^2 (v|v).$$

Wegen $(v|v) = \|v\|^2 \neq 0$ folgt $|\lambda|^2 = 1$ und somit $|\lambda| = 1$.