Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

SS 2016
27.05.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe die *Spektraldarstellung*

$$Ax = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ und Orthogonalprojektionen $P_1, \ldots, P_r$ derart, dass $\sum_{i=1}^r P_i = I_n$, wobei I_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{C}^{n\times n}$ sei, und $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$. Zum Beispiel liefert der **Spektralsatz für hermitesche Matrizen** (**18.8**) eine solche Darstellung. Dann definiert man für eine Abbildung $f : \sigma(A) := \{\lambda_1; \ldots; \lambda_r\} \to \mathbb{C}$ den sogenannten *Funktionalkalkül* $\Phi_A(f) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, welcher durch

$$\Phi_A(f)x = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i) P_i x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

eindeutig festgelegt wird. Zeigen Sie für $f, g : \sigma(A) \to \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

a) $\Phi_A(\mathrm{id}_{\sigma(A)}) = A$, $\Phi_A(\mathbb{1}_{\sigma(A)}) = I_n$, wobei $\mathbb{1}_{\sigma(A)}$ die konstante Einsfunktion auf $\sigma(A)$ sei,

b) $\Phi_A(f \cdot g) = \Phi_A(f) \cdot \Phi_A(g)$, d.h. Φ_A ist multiplikativ,

c) $\Phi_A(f + \alpha g) = \Phi_A(f) + \alpha \Phi_A(g)$, d.h. Φ_A ist linear,

d) v ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \Rightarrow v$ ist Eigenvektor von $\Phi_A(f)$ zum Eigenwert $f(\lambda)$,

e) $\Phi_A(f \circ g) = \Phi_{\Phi_A(g)}(f)$.

Anmerkung: Anstelle von $\Phi_A(f)$ schreibt man auch einfach abkürzend $f(A)$.

Lösungsvorschlag

Wir wollen kurz darauf eingehen, wie wir aus dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen **18.8** die obige Spektraldarstellung erhält. Sei dazu A selbstadjungiert und $\{u_1; \ldots; u_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren mit zugehörigen Eigenwerten $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ (!). Ohne Einschränkung können wir die Eigenvektoren und Eigenwerte so anordnen, dass $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{i_1}$, $\mu_{i_1+1} = \ldots = \mu_{i_2}$, $\ldots$,$\mu_{i_{r-1}+1} = \ldots = \mu_n$ sowie $\mu_{i_j} \neq \mu_{i_k}$ und $i_j < i_k$ für $j < k$ für ein $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant n$, gelten. Das heißt wir gruppieren die Eigenvektoren nach den zugehörigen Eigenwerten. Dann gilt für alle $1 \leqslant j \leqslant r$

$$\mathrm{E}_A(\mu_{i_j}) = \mathrm{lin}(\{u_{i_{j-1}+1}; \ldots; u_{i_j}\}),$$

wobei wir $i_0 := 0$ und $i_r := n$ setzen. Da $\{u_{i_{j-1}+1}; \ldots; u_{i_j}\}$ als Teilmenge eines ONS selbst wieder ein ONS und damit eine ONB von $\mathrm{E}_A(\mu_{i_j})$ ist, liefert **Satz 15.8** uns jetzt, dass die Orthogonalprojektion

$P_{\mathrm{E}_A(\mu_{i_j})}$ auf $\mathrm{E}_A(\mu_{i_j})$ durch

$$P_{\mathrm{E}_A(\mu_{i_j})}x \;=\; \sum_{k=i_{j-1}+1}^{i_j} \underbrace{(x|u_k)u_k}_{=P_{\mathrm{lin}(\{u_k\})}x} \;=\; \sum_{k=i_{j-1}+1}^{i_j} P_{\mathrm{lin}(\{u_k\})}x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

für alle $1 \leqslant j \leqslant r$ gegeben ist. Wir definieren nun für alle $1 \leqslant j \leqslant r$

$$\lambda_j \;:=\; \mu_{i_j}, \quad P_j \;:=\; P_{\mathrm{E}_A(\mu_{i_j})}.$$

Nach **18.8** gilt

$$Ax \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x|u_i)u_i \;=\; \sum_{j=1}^{r} \mu_{i_j} \sum_{k=i_{j-1}+1}^{i_j} (x|u_k)u_k \;=\; \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j x,$$

wie wir gerade zeigen wollten. Eine wichtige Eigenschaft der Projektionen ist $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, da die Eigenräume nach Voraussetzung orthogonal zueinander sind. Außerdem gilt nach **Satz 15.1**

$$\sum_{j=1}^{r} P_j \;=\; \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=i_{j-1}+1}^{i_j} P_{\mathrm{lin}(\{u_k\})} \;=\; \sum_{i=1}^{n} P_{\mathrm{lin}(\{u_i\})} \;=\; I_n,$$

da $\{u_1;\ldots;u_n\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^n$ ist. Wenden wir uns also den eigentlichen Aufgaben zu. Seien dazu $f,g : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ Abbildungen und $\alpha \in \mathbb{C}$ sowie $x \in \mathbb{C}^n$.

a) Es gelten

$$\Phi_A(\mathrm{id}_{\sigma(A)})x \;=\; \sum_{i=1}^{r} \mathrm{id}_{\sigma(A)}(\lambda_i) P_i x \;=\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i x \;=\; Ax$$

und

$$\Phi_A(\mathbb{1}_{\sigma(A)})x \;=\; \sum_{i=1}^{r} P_i x \;=\; x$$

nach Voraussetzung an die P_i.

b)

$$\begin{aligned}\Phi_A(f \cdot g)x \;&=\; \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)g(\lambda_i)P_i x \;=\; \sum_{i,j=1}^{r} f(\lambda_i)g(\lambda_i) \underbrace{P_i P_j}_{=\delta_{ij}P_i} x \\ &=\; \sum_{i,j=1}^{r} f(\lambda_i)g(\lambda_j)P_i P_j x \;=\; \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)P_i \left(\sum_{j=1}^{r} g(\lambda_j)P_j x \right) \\ &=\; \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)P_i(\Phi_A(g)x) \;=\; \Phi_A(f)\Phi_A(g)x\end{aligned}$$

Dabei können wir im Schritt von der ersten zur zweiten Zeile die Indizes $i \leftrightarrow j$ wegen des Faktors δ_{ij} beliebig tauschen.

c) Die Linearität nachzurechnen, sei dem Leser überlassen.

d) Sei v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann gilt für alle $1 \leqslant j \leqslant r$ wegen der Linearität von P_j und wegen $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$

$$\lambda P_j v \;=\; P_j A v \;=\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_j P_i x \;=\; \lambda_j P_j v.$$

Wäre $\lambda \neq \lambda_j$ für alle $1 \leqslant j \leqslant r$, so gälte $(\lambda - \lambda_j) P_j v = 0$ für alle $1 \leqslant j \leqslant r$, d.h., $P_j v = 0$ für alle $1 \leqslant j \leqslant r$. Dann gälte aber auch $0 = \sum_{j=1}^{r} P_j v = v$ nach Voraussetzung, ein Widerspruch dazu, dass ein Eigenvektor als zum Nullvektor verschieden vorausgesetzt wird. Also existiert genau ein $1 \leqslant j \leqslant r$ mit $\lambda = \lambda_j$, da die λ_i paarweise verschieden vorausgesetzt werden. Für alle $i \neq j$ gilt dann mit gleichem Argument wie oben $P_i v = 0$. Insbesondere gilt

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{r} P_i v \;=\; P_j v.$$

Damit erhalten wir

$$\Phi_A(f) v \;=\; \Phi_A(f) P_j v \;=\; \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i) P_i P_j v \;=\; f(\lambda_j) P_j v \;=\; f(\lambda_j) v,$$

d.h. gerade, dass v Eigenvektor von $\Phi_A(f)$ zum Eigenwert $f(\lambda_j)$.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht im Allgemeinen: Ist $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $f := \mathbb{1}_{\{0;1\}}$, so gilt $\Phi_A(f) \overset{\text{a)}}{=} I_2$. Dann ist $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor von $\Phi_A(f)$ zum Eigenwert 1, aber wegen $Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda v$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ v kein Eigenvektor von A.

e) Sei $x \in \mathbb{C}^n$. Zunächst hat $\Phi_A(g)$ nach Definition die Spektraldarstellung $\Phi_A(g)x = \sum_{i=1}^{r} g(\lambda_i) P_i x$, weshalb wir

$$\Phi_A(f \circ g) x \;=\; \sum_{i=1}^{r} f(g(\lambda_i)) P_i x \;=\; \Phi_{\Phi_A(g)}(f) x$$

erhalten.

Bemerkungen:

a) Neben den bereits genannten Eigenschaften, besitzt der Funktionalkalkül noch weitere. Sei im Folgenden A selbstadjungiert.

- Mit leichter Rechnung erhalten wir $\Phi_A(f)^* = \Phi_A(\overline{f})$. Insbesondere ist $\Phi_A(f)$ genau dann selbstadjungiert, wenn f reell ist.
- $\Phi_A(f)$ ist genau dann positiv semi-definit, wenn $f \geqslant 0$ gilt.
- $\Phi_A(f)$ ist normal.
- $\sigma(M)$ sei für eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Menge aller komplexen Zahlen λ, für welche $A - \lambda$ nicht invertierbar ist. $\sigma(M)$ wird auch *Spektrum* von M genannt und ist im Fall von endlich-dimensionalen Vektorräumen gleich der Menge aller Eigenwerte. Mit dieser Notation gilt der *Spektralabbildungssatz* $\sigma(\Phi_A(f)) = f(\sigma(A))$, oder in unserer oben eingeführten Kurzschreibweise:
$$\sigma(f(A)) \;=\; f(\sigma(A)).$$

b) Wegen der endlichen Dimension von $\mathbb{C}^n$ ist der Funktionalkalkül durch die Linearität, die Multiplikativität und $\Phi_A(\mathrm{id}_{\sigma(A)}) = A$ sowie $\Phi_A(\mathbb{1}_{\sigma(A)}) = I_n$ eindeutig festgelegt. Denn es gilt zunächst für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Phi_A(\mathrm{id}_{\sigma(A)}^k) \;=\; \Phi_A(\mathrm{id}_{\sigma(A)})^k \;=\; A^k$$

mit $A^0 := I_n$, $\mathrm{id}^0_{\sigma(A)} := \mathbb{1}_{\sigma(A)}$ und damit für jedes Polynom P

$$\Phi_A(P) \;=\; P(A).$$

Nun ist jede Funktion auf $\sigma(A)$ durch endlich viele Werte $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_r)$ eindeutig festgelegt. Daher lässt sich ein eindeutiges Polynom maximal $(r-1)$-ten Grades bestimmen, welches an der Stelle λ_i den Wert $f(\lambda_i)$ annimmt. Das heißt aber gerade, dass die Menge aller Abbildungen von $\sigma(A)$ nach $\mathbb{C}$ gerade die Menge aller Polynome vom Grad $\leqslant r-1$ ist. Damit ist Φ_A durch $\Phi(A)(P) = P(A)$ bereits eindeutig festgelegt.

Aufgabe 26 (Tutorium)

a) Sei $\beta > 0$. Untersuchen Sie

$$A := \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Funktionalkalküls (siehe **Aufgabe 25**)

$$\rho \;:=\; \frac{\mathrm{e}^{-\beta A}}{\mathrm{Spur}(\mathrm{e}^{-\beta A})} \quad \text{und} \quad S := -\mathrm{Spur}(\rho \log(\rho)).$$

Anmerkung: ρ heißt in der Physik *Dichtematrix* und $k_B S$ die *Entropie*.

Lösungsvorschlag

a) Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom von A. Es gilt

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) \;&=\; \begin{vmatrix} \frac{5}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \;=\; \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} (2-\lambda)\left[\left(\frac{5}{3}-\lambda\right)(2-\lambda) + \frac{1}{3}(\lambda-2)\right] - \frac{1}{3}(\lambda-2)^2 \\
&= -(\lambda-2)^2(\lambda-1)
\end{aligned}$$

D.h., die Eigenwerte von A sind 1 und 2 und damit ist A positiv definit.

b) Wie in **Aufgabe 25** benötigen wir zunächst die Spektraldarstellung von A. Dazu bestimmen wir Eigenvektoren von A. Es gelten

$$\mathrm{E}_A(1) = \mathrm{Kern}(A - I_3) = \mathrm{Kern}(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}) = \mathrm{lin}(\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right\})$$

und

$$\mathrm{E}_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2I_3) = \mathrm{Kern}(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}) = \mathrm{lin}(\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}).$$

Nun berechnen wir die einzelnen *Spektralprojektionen* auf die jeweiligen Eigenräume:

$$P_1 := P_{\mathrm{E}_A(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_2 := P_{\mathrm{E}_A(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Leichter erhalten wir P_2 durch die Identität $P_1 + P_2 = I_3$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\beta A} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\beta} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\beta} \\ \mathrm{Spur}(\mathrm{e}^{-\beta A}) &= \mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\mathrm{e}^{-\beta A}}{\mathrm{Spur}(\mathrm{e}^{-\beta A})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{-\beta}}{\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta}} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{-2\beta}}{\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta}} \\ \log(\rho) &\overset{\textbf{A25 e)}}{=} \Phi_A(\log \circ \frac{\mathrm{e}^{-\beta(\cdot)}}{\mathrm{Spur}(\mathrm{e}^{-\beta A})}) = \Phi_A(-\beta(\cdot) - \log(\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta})\mathbb{1}_{\sigma(A)}) \\ &\overset{\textbf{A25 c)}}{=} -\beta A - \log(\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta}) I_3 \\ \rho\log(\rho) &= \frac{\mathrm{e}^{-\beta A}}{\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta}} \left(-\beta A - \log(\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta}) I_3\right) \\ &\overset{\textbf{Funktionalkalkül}}{=} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta}} (P_1 \mathrm{e}^{-\beta} + P_2 \mathrm{e}^{-2\beta}) \left(-\beta P_1 - 2\beta P_2 - \log(\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta}) I_3\right) \\ &\overset{P_i P_j = \delta_{ij} P_i}{=} -\frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta}} \left[\left(\beta + \log(\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta})\right) P_1 \mathrm{e}^{-\beta} + \left(2\beta + \log(\mathrm{e}^{-\beta} + 2\mathrm{e}^{-2\beta})\right) P_2 \mathrm{e}^{-2\beta}\right] \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{Spur}(P_i) = i$ in unserem Beispiel und der Linearität der Spur erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
S &= -\mathrm{Spur}(\rho\log(\rho)) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta}+2\mathrm{e}^{-2\beta}}\left[\left(\beta+\log(\mathrm{e}^{-\beta}+2\mathrm{e}^{-2\beta})\right)\mathrm{e}^{-\beta}+\left(2\beta+\log(\mathrm{e}^{-\beta}+2\mathrm{e}^{-2\beta})\right)2\mathrm{e}^{-2\beta}\right] \\
&= \log(\mathrm{e}^{-\beta}+2\mathrm{e}^{-2\beta})+\frac{\beta\left(\mathrm{e}^{-\beta}+4\mathrm{e}^{-2\beta}\right)}{\mathrm{e}^{-\beta}+2\mathrm{e}^{-2\beta}} \\
&= \log(1+2\mathrm{e}^{-\beta})+\frac{2\beta}{\mathrm{e}^{\beta}+2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 27 (Übung)

Seien $\mathcal{I}$ eine Indexmenge, $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B, A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ für $i \in \mathcal{I}$. Zeigen Sie:

a) Sind A und B offen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A offen und B abgeschlossen, so ist auch $A \setminus B$ offen.

b) Sind A und B abgeschlossen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A abgeschlossen und B offen, so ist auch $A \setminus B$ abgeschlossen.

c) Sind alle A_i offen, so auch $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ (siehe **Aufgabe 3a)** in **HM 1**). Sind alle A_i abgeschlossen, so auch $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$.

Lösungsvorschlag

a) Seien zunächst A und B offen sowie $x_0 \in A \cup B$. Dann ist $x_0 \in A$ oder $x_0 \in B$ und da beide Mengen offen sind, existiert ein $r > 0$ mit $U_r(x_0) \subseteq A \subseteq A \cup B$ oder $U_r(x_0) \subseteq B \subseteq A \cup B$, womit $A \cup B$ offen ist.
Seien nun A und B offen sowie $x_0 \in A \cap B$. Dann gilt $x_0 \in A$ und $x_0 \in B$, womit $r_1, r_2 > 0$ existieren mit $U_{r_1}(x_0) \subseteq A$ und $U_{r_2}(x_0) \subseteq B$. Mit $r := \min\{r_1, r_2\}$ gilt also $U_r(x_0) \subseteq A \cap B$, womit $A \cap B$ offen ist.
Sei nun A offen und B abgeschlossen. Dann ist per Definition $B^C := \mathbb{R}^n \setminus B$ offen. Nach HM 1 gilt

$$A \setminus B = A \cap B^C$$

und da wir eben bereits gezeigt haben, dass der Schnitt zweier offener Mengen offen ist, gilt dies insbesondere für $A \setminus B$.

b) Seien zunächst A und B abgeschlossen. Um zu zeigen, dass $A \cup B$ abgeschlossen ist, zeigen wir, dass $(A \cup B)^C$, das nach den DeMorganschen Regeln mit $A^C \cap B^C$ übereinstimmt, offen ist. Da A^C und B^C offen sind, folgt dies aus **a)**. Um die Abgeschlossenheit von $A \cap B$ zu zeigen, weisen wir die Offenheit von $(A \cap B)^C$ nach, das mit $A^C \cup B^C$ übereinstimmt. Die Offenheit davon folgt wieder mit **a)**.
Sei nun A abgeschlossen und B offen. Es gilt

$$A \setminus B = A \cap B^C$$

und letztere Menge ist nach dem bereits gezeigten abgeschlossen, da A und B^C abgeschlossen sind.

c) Seien alle A_i offen und $x_0 \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$. Somit ist $x_0 \in A_{i_0}$ für mindestens ein $i_0 \in \mathcal{I}$, womit ein $r > 0$ existiert mit $U_r(x_0) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$. Damit ist $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ offen.

Seien nun alle A_i abgeschlossen, d.h., alle A_i^C offen. Dann gilt nach **Aufgabe 3a)** auf Übungsblatt 1 in HM 1

$$\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)^C = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i^C,$$

welches wegen Obigem offen ist. Damit ist $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ nach Definition abgeschlossen.

Aufgabe 28 (Tutorium)

a) Überprüfen Sie die nachfolgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit.

(i) $M_1 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x^2+5y^2 < 1\right\}$

(ii) $M_2 := \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n^2}\right)\in\mathbb{R}^2 : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{(0,0)\}$

b) Geben Sie je ein solches Beispiel einer Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ an, dass

(i) das Bild einer (speziellen) offenen Menge $O\subseteq\mathbb{R}^2$ unter f nicht offen ist,

(ii) das Bild einer (speziellen) abgeschlossenen Menge $A\subseteq\mathbb{R}^2$ unter f nicht abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

a) (i) Sei $(x_0,y_0)\in M_1$, d.h, $0<x_0^2+5y_0^2<1$. Definiere $\alpha := \frac{1+x_0^2+5y_0^2}{2(x_0^2+5y_0^2)}$ und wähle

$$\delta := \min\left(\left\{\frac{|x_0|}{2};\frac{|y_0|}{2};(\sqrt{\alpha}-1)|x_0|;(\sqrt{\alpha}-1)|y_0|\right\}\right).$$

Für alle $(x,y)\in U_\delta((x_0,y_0))\subseteq U_\delta(x_0)\times U_\delta(y_0)$ gilt

$$\begin{aligned}\underline{0<}\frac{x_0^2+5y_0^2}{4} &\leqslant (|x_0|-\delta)^2+5(|y_0|-\delta)^2 < (|x_0|-|x-x_0|)^2+5(|y_0|-|y-y_0|)^2 \leqslant \underline{x^2+5y^2}\\ &\leqslant(|x_0|+|x-x_0|)^2+5(|y_0|+|y-y_0|)^2 < (|x_0|+\delta)^2+5(|y_0|+\delta)^2 \leqslant \alpha(x_0^2+5y_0^2)\\ &=\frac{1+x_0^2+5y_0^2}{2}\underline{<1}\end{aligned}$$

Damit ist M_1 offen. Andererseits ist M_1 nicht abgeschlossen. Betrachte dazu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = ((\frac{1}{2k},0))_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(\frac{1}{2k},0)\in M_1$ für alle $k\in\mathbb{N}$, aber $\lim_{k\to\infty} a_k = 0\notin M_1$. Also ist M_1 nicht abgeschlossen, nach der Charakterisierung abgeschlossener Mengen aus dem Abschnitt 19.2 der Vorlesung.
Anmerkung: Man kann auch mit der Abgeschlossenheit des Komplements

$$M_1^C \overset{(!)}{=} \{0\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 x^2+5y^2\geqslant 1\right\}$$

begründen, dass M_1 offen ist

(ii) M_2 ist abgeschlossen: Sei $((x_k,y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine (in $\mathbb{R}^2$) gegen (x_0,y_0) konvergente Folge in M_2.
Fall 1: Für alle $\varepsilon>0$ existieren unendlich viele $k\in\mathbb{N}$ mit $(x_k,y_k)\in U_\varepsilon(0,0)$, d.h., $(0,0)$ ist Häufungspunkt von $((x_k,y_k))_k$. Dann ist wegen der Konvergenz von $((x_k,y_k))_k$ $(0,0)$ der Grenzwert von $((x_k,y_k))_k$, welcher andererseits (x_0,y_0) ist. Insbesondere liegt also $(x_0,y_0$ in M_2
Fall 2: Es existiert ein $\varepsilon>0$ derart, dass ab einem gewissen Index k_0 alle (x_k,y_k), $k\geqslant k_0$, nicht in $U_\varepsilon(0,0)$ liegen. D.h., $\|(x_k,y_k)\|\geqslant\varepsilon>0$ für alle $k\geqslant k_0$, also wegen der Stetigkeit der

Norm auch $\|(x_0, y_0)\| \geqslant \varepsilon > 0$. Also gilt $x_0 \neq 0$ oder $y_0 \neq 0$. Dann gibt es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ derat, dass $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{n_k}, \frac{1}{2n_k^2}\right)$ gilt. Ist nun $x_0 \neq 0$, so gilt

$$\frac{1}{x_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = \lim_{k\to\infty} n_k.$$

Da $n_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $n_0 := \frac{1}{x_0} \in \mathbb{N}$ aus der Definition der Konvergenz (!). Außerdem folgt

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2n_k^2} = \frac{1}{2n_0^2},$$

d.h., $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{2n_0^2}\right) \in M_2$. Mit einem sehr ähnlichen Argument erhält man im Fall $y_0 \neq 0$ $(x_0, y_0) \in M_2$.

Auf der andere Seite ist M_2 nicht offen: Wähle die Folge $(x_k, y_k) := \left(1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right) \notin M_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$. D.h. insbesondere, dass aufgrund der Konvergenz für alle $\varepsilon > 0$ ein solches $k \in \mathbb{N}$ existiert, dass $U_\varepsilon(1, \frac{1}{2}) \ni (x_k, y_k) \notin M_2$. Also gilt für alle $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(1, \frac{1}{2}) \not\in M_2$.

Anmerkung: Wie in der 7. Saalübung in **HM 1** für Teilmengen von $\mathbb{R}$ gezeigt, gilt auch für Teilmengen A von $\mathbb{R}^n$, dass A genau dann offen und abgeschlossen ist, wenn $A \in \{\emptyset; \mathbb{R}^n\}$.

b) (i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist das Bild jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ (zum Beispiel $\mathbb{R}^2$ selbst) gerade $\{0\}$, also nicht offen. Alternativ sei $f(x, y) = (\sin(x), \cos(y))$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist das Bild der offenen Menge $\mathbb{R}^2$ (oder auch $(-2\pi, 2\pi)^2$) unter f gerade $[-1, 1]^2$, also nicht offen.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y)$. Dann ist das Bild der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}^2$ gerade $(0, \infty)^2$, also nicht abgeschlossen.

Aufgabe 29 (Übung)

Es sei $D := U_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie jeweils für die angegebene Funktion f ob der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

a) $f : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{\sin(x^3 y)}{e^{y^2}\cos(xy)}$,

b) $f : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x^{k-1}y^{k+3} + x^k y^{k+2}}{6x^{2k+2} + 4y^{2k+2}}$ für ein $k \in \mathbb{N}$,

c) $f : D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (1 - e|x + y|)^{x/(x^2+y^2)}$.

Lösungsvorschlag

a) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \frac{\sin(x^3 y)}{e^{y^2}\cos(xy)}$.
Behauptung: Es gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
Beweis: Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $w_n \to (0,0)$ für $n \to \infty$, das heißt $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$ für $n \to \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(w_n) = f(x_n, y_n) = \frac{\sin(x_n^3 y_n)}{e^{y_n^2}\cos(x_n y_n)}.$$

Ferner haben wir

$$\lim_{n\to\infty} e^{y_n^2} = 1 = \lim_{n\to\infty} \cos(x_n y_n).$$

Aus der Stetigkeit des Sinus und $\sin 0 = 0$ folgt damit insgesamt

$$|f(w_n)| \to 0$$

für $n \to \infty$. Somit existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

b) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{x^{k-1}y^{k+3}+x^k y^{k+2}}{6x^{2k+2}+4y^{2k+2}}$ mit $k \in \mathbb{N}$.
Behauptung: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.
Beweis: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2}}{6\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2} + 4\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $y = -x$ gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$x^{k-1}y^{k+3} + x^k y^{k+2} = (-1)^{k+3}x^{2k+2} + (-1)^{k+2}x^{2k+2} = (-1)^{k+2}(-x^{2k+2} + x^{2k+2}) = 0.$$

Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Wegen $(1/n,1/n) \to (0,0)$ und $(1/n,-1/n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$ und $\frac{1}{5} \neq 0$, existiert daher $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

c) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := (1 - e|x+y|)^{x/(x^2+y^2)}$.
Behauptung: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.
Beweis: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \to e^{-e}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \to e^{e}.$$

Wegen $(1/n,1/n) \to (0,0)$ und $(-1/n,-1/n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$ und $e^e \neq e^{-e}$ existiert daher $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

Aufgabe 30 (Tutorium)

Es sei $D := U_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie jeweils für die angegebene Funktion f ob der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

a) $f : D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{2x^2y^3}{x^8+y^4}$

b) $f : D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

c) $f : D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{2x^2y^3}{x^8+y^4}.$$

Behauptung: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.

Beweis: Wir betrachten die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $w_n := (1/n, 1/n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $w_n \to (0,0)$ für $n \to \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$f(w_n) = \frac{2\cdot 1/n^2 \cdot \left(1/n^2\right)^3}{1/n^8 + \left(1/n^2\right)^4} = 1 \to 1 \neq 0 \leftarrow 0 = f(0, 1/n)$$

für $n \to \infty$. Somit existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

b) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

Behauptung: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$

Beweis: Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{(x^2+y^2+1)-1} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+1}+1. \end{aligned}$$

Somit haben wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}+1 \to \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2$$

für $(x,y) \to (0,0)$.

c) *Voraussetzung:* Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Behauptung: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.

Beweis: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x,x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2x^2}} = \exp\left(\frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right).$$

Mit der Regel von L'Hospital sieht man $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ für $t \to 0$. Ferner gilt $x^2 \to 0$ für $x \to 0$. Wegen $(x,x) \to (0,0)$ für $x \to 0$ und weil die Exponentialfunktion stetig ist, haben wir damit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x,x) &= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right) \overset{x^2=t}{=} \lim_{t\to 0} \exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right) = \sqrt{e} \neq 1 = \lim_{y\to 0} f(0,y).\end{aligned}$$

Also existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.