

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

6. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 31 (ÜBUNG)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $0 \in D$ auf Stetigkeit.

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ (0, 1), & x = 0. \end{cases}$
- b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0, \\ \frac{z}{2}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0. \end{cases}$

AUFGABE 32 (TUTORIUM)

Die Funktionen f , g und h seien für $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$$

gegeben und $f(0, 0) := g(0, 0) := h(0, 0) := 0$. Zeigen Sie:

- a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- b) Die Funktion g ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden stetig*: Für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \rightarrow g(0, 0)$ für $r \rightarrow 0+$.
- c) Die Funktion h ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y)$$

existieren und stimmen mit $h(0, 0)$ überein.

AUFGABE 33 (ÜBUNG)

- a) Die Kurve $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad \forall t \in (-1, 1)$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

- b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2 (z-1)}{x^2 + y^2 + (z-1)^2}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 1). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in denen f stetig ist. Bestimmen Sie außerdem alle $t \in (-1, 1)$, in denen $f \circ \gamma$ differenzierbar ist.

AUFGABE 34 (TUTORIUM)

- a) Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

- b) Seien $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} (\|x\| - 1)^k, & \|x\| \neq 1, \\ 0, & \|x\| = 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $t \in [0, 2\pi]$, in denen $f \circ \gamma$ differenzierbar ist.

AUFGABE 35 (ÜBUNG)

Sei

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists 0 \leq \lambda \leq 1 : (x, y) = \lambda(1, 0) \vee (x, y) = \lambda(1, 1) \vee (x, y) = \lambda(1, 0) + (1 - \lambda)(1, 1)\}.$$

- a) Bestimmen Sie eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ derart, dass $f([a, b]) = A$ gilt.
- b) Seien $\{x_0; x_1; \dots; x_m\}$ die Stützstellen, bzgl. derer die in a) bestimmte Funktion stückweise differenzierbar ist. Bestimmen Sie

$$\sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \|f'(t)\| dt.$$

- c) Ist es in a) möglich, eine differenzierbare Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(a) = \gamma(b) \neq (1, 0)$ sowie $\gamma' \neq 0$ zu finden?

AUFGABE 36 (TUTORIUM)

Sei

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (|y| - 1/2)^2 = \frac{1}{4}, |y| \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

- a) Bestimmen Sie eine reguläre Parametrisierung von A , welche A im positivem Sinne umlaufe, d.h., finden Sie eine reguläre Kurve, deren Spur gerade A ist und die A im positivem Sinne umläuft.
- b) Bestimmen Sie die Kurvenlängen der in a) bestimmten Kurve.
- c) Bestimmen Sie die natürliche Parametrisierung der in a) bestimmten Kurve.