KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

SS 2016
03.06.2016

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 6. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 31 (ÜBUNG)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ in $0 \in D$ auf Stetigkeit.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ (0,1), & x = 0. \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2 y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ (0,0), & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0, \\ \frac{z}{2}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0. \end{cases}$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) *Voraussetzung:* Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (0,1), & x = 0. \end{cases}$

Behauptung: f ist stetig in 0.
Beweis: Es gilt

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

und $|x|^{x^2} = e^{x^2 \log(|x|)} \xrightarrow{x \to 0} 1$ wegen

$$\lim_{x \to 0} x^2 \log(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{x^{-2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \to 0} -\frac{x^2}{2} = 0.$$

Somit sind beide Komponenten der Funktion stetig in 0 (außerhalb von 0 ist dies klar). Damit ist f laut Vorlesung stetig in 0.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2 y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Behauptung: f ist in $(0,0)$ stetig.
Beweis: Es gilt wegen $(x-y)^2 \geqslant 0$, dass $2xy \leqslant x^2 + y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Deshalb folgt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} |\sin(xy^2 - x^2 y)| = 2 |\sin(xy^2 - x^2 y)| \xrightarrow{(x,y) \to (0,0)} 0,$$

also

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Somit folgt, dass f in $(0,0)$ stetig ist.

c) *Voraussetzung:* Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Behauptung: f ist nicht stetig in $(0,0)$.
Beweis: Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ gilt

$$\|f(x,y) - f(0,0)\| = 1$$

und damit ist f in $(0,0)$ nicht stetig.

d) *Voraussetzung:* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0 \\ \frac{z}{2}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0 \end{cases}$.

Behauptung: f ist in $(0,0,0)$ nicht stetig.
Beweis: Es gilt, dass

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \neq 0\}}_{=:D_1} \,\dot\cup\, \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\}}_{=:D_2}.$$

Wir setzen $v^0 := (0,0,0)$. Wir zeigen, dass f in v^0 nicht stetig ist. v^0 ist ohne Zweifel ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^3$ und es gilt $f(v^0) = 0$. Für $(v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $v^{(k)} := (\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ gilt $v^{(k)} \in D_1$ für $k \in \mathbb{N}$ und $v^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} v^0$. Aber für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(v^{(k)}) = \frac{(1-\cos(\frac{1}{k^4}))\sin(\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k^9}} = \frac{(1-\cos(\frac{1}{k^4}))}{\frac{1}{k^8}} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(v^0).$$

Dies gilt wegen

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\sin(x^3+x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1,$$

was beides mittels der Regel von L'Hospital eingesehen werden kann. Alternativ betrachtet man im ersten Fall die Potenzreihe des Kosinus und schreibt den zweiten Bruch um als $\frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} \cdot \frac{x^3+x}{x} = \frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} \cdot (x^2+1)$.

Aufgabe 32 (Tutorium)

Die Funktionen f, g und h seien für $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben und $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden stetig*: Für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \to g(0,0)$ für $r \to 0+$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Lösungsvorschlag

a) Klar: f ist stetig in jedem $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen.

Sei $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k,y_k)\to(0,0)$ und $(x_k,y_k)\neq(0,0)$ für alle $k\in\mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt wegen $(x-y)^2\geqslant 0$, dass $2xy\leqslant x^2+y^2$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Es folgt

$$|f(x_k,y_k)| = |\frac{x_k y_k^2}{x_k^2+y_k^2}| \leqslant |y_k|\frac{x_k^2+y_k^2}{2(x_k^2+y_k^2)} = \frac{|y_k|}{2} \to 0 = f(0,0)$$

für $k\to\infty$. Damit ist f stetig in $(0,0)$.

b) Die Funktion g ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k^2},\frac{1}{k})\to(0,0)$ für $k\to\infty$, aber

$$g\left(\frac{1}{k^2},\frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \not\to 0 = g(0,0)$$

für $k\to\infty$.

Sei $\varphi\in\mathbb{R}$ beliebig. Angenommen, $\cos(\varphi)=0$. Dann ist $\sin(\varphi)\neq 0$ und

$$g(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi)) = \frac{r^3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi)+r^4\sin^4(\varphi)} = 0 \to 0 = g(0,0)$$

für $r\to 0+$. Ist $\cos(\varphi)\neq 0$, so ist trotzdem

$$g(r\cos(\varphi),r\sin(\varphi)) = \frac{r^3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi)+r^4\sin^4(\varphi)} = r\frac{\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)+r^2\sin^4(\varphi)} \to 0 = g(0,0)$$

für $r\to 0+$.

c) Die Funktion h ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k},\frac{1}{k})\to(0,0)$ für $k\to\infty$, aber

$$h\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = 1 \not\to 0 = h(0,0)$$

für $k\to\infty$.

Sei $x\neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \to \frac{0}{0+\underbrace{(x-0)^2}_{>0}} = 0$$

für $y\to 0$. Ist $x=0$, so ist $h(x,y)=0\to 0$ für $y\to 0$. Also gilt in der Tat $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}h(x,y) = h(0,0)=0$. Wegen $h(x,y)=h(y,x)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt auch $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}h(x,y)=h(0,0)=0$.

Aufgabe 33 (Übung)

a) Die Kurve $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in (-1,1)$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parameterisierung.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{x^2y^2(z-1)}{x^2+y^2+(z-1)^2}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,1)\}, \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,1). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in denen f stetig ist. Bestimmen Sie außerdem alle $t \in (-1,1)$, in denen $f \circ \gamma$ differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

für alle $t \in (-1,1)$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$s(t) := \int_{-1}^{t} \|\gamma'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \sqrt{2}(\arcsin(t) - \arcsin(-1)) = \sqrt{2}\left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in [-1,1]$. Es ist also $L(\gamma) = s(1) = \sqrt{2}\pi$. Die Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, \sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}$ ist durch

$$s^{-1}(t) = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

für alle $t \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben. Die natürliche Parameterisierung von γ ist dann durch

$$\gamma \circ s^{-1}(t) = \gamma\left(-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \\ -\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben.

b) *Behauptung:* f ist stetig (auf $\mathbb{R}$) und $f \circ \gamma$ ist differenzierbar (auf $(-1,1)$).
Beweis: Als Komposition von stetigen Funktionen ist f stetig auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,1)\}$. Für $(0,0,0)$ und $(x,y,z) \neq (0,0,1)$, $\|(x,y,z) - (0,0,1)\| \leqslant 1$ erhalten wir

$$|f(x,y,z) - f(0,0,1)| = \frac{x^2y^2|z-1|}{x^2+y^2+(z-1)^2} \leqslant \frac{x^2y^2}{x^2+y^2},$$

wobei wir im letzten Schritt $0 \leqslant |z-1| \leqslant 1$ verwendet haben. Ein nützliches Hilfsmittel bei solchen Abschätzung ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Mit ihr erhalten wir

$$|f(x,y,z) - f(0,0,1)| \leqslant \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{x^4+y^4}{2(x^2+y^2)} \leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{x^2+y^2}{2} \to 0,$$

wenn $(x,y,z) \to (0,0,1)$. Also ist f auch in $(0,0,1)$ stetig. Bevor wir die Differenzierbarkeit von $f \circ \gamma$ untersuchen können, müssen wir zunächst die Stellen $t \in (-1,1)$ bestimmen, in denen $\gamma(t) = (0,0,1)^T$ gilt. Da arcsin injektiv ist, gilt $\gamma_1(t) = 0$ genau in $t = 0$. Dort gilt auch $\gamma(t) = (0,0,1)^T$. Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist dann $f \circ \gamma$ auf $(-1,1) \setminus \{0\}$ differenzierbar. Wegen

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t-0} = \frac{\arcsin^2(t)t(\sqrt{1-t^2})}{t} = \arcsin^2(t)t(\sqrt{1-t^2}) \to 0,$$

wenn $t \to 0$, ist $f \circ \gamma$ auch in 0 differenzierbar (und $(f \circ \gamma)'(0) = 0$).

Aufgabe 34 (Tutorium)

a) Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge $L(\gamma)$ und natürliche Parametrisierung.

b) Seien $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} (\|x\| - 1)^k & , \|x\| \neq 1, \\ 0 & , \|x\| = 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $t \in [0, 2\pi]$, in denen $f \circ \gamma$ differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$s(t) := \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}\, t$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Es ist also $L(\gamma) = s(2\pi) = 2\sqrt{\pi^2+4}$. Die natürliche Parameterisierung von γ ist durch

$$\gamma \circ s^{-1}(t) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}t\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}t\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}t\right) \\ \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\sqrt{\pi^2+4}]$ gegeben.

b) Zunächst gilt für alle $t \in [0, 2\pi]$

$$\|\gamma(t)\| = \left(\cos^2(t) + \sin^2(t) + \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Insbesondere gilt $\|\gamma(t)\| = 1$ genau dann, wenn $t = 0$. Damit ist $f \circ \gamma$ auf $(0, 2\pi]$ als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Außerdem erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} &= \frac{1}{t}\left(\left(1 + \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)^k = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{4t^2}{\pi^2} - 1\right)^k \left(\left(1 + \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right)^{-k} \\ &= \frac{4^k}{\pi^{2k}} t^{2k-1} \left(\left(1 + \frac{4t^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right)^{-k} \end{aligned}$$

für alle $t \in (0, 2\pi]$, dass $f \circ \gamma$ genau dann in 0 differenzierbar ist, wenn $k \geqslant \frac{1}{2}$ gilt.

Aufgabe 35 (Übung)

Sei

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 : (x,y) = \lambda(1,0) \vee (x,y) = \lambda(1,1) \vee (x,y) = \lambda(1,0) + (1-\lambda)(1,1)\right\}.$$

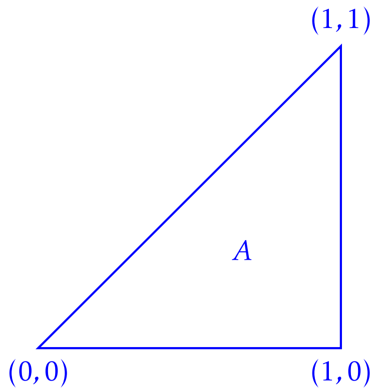
a) Bestimmen Sie eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ derart, dass $f([a,b]) = A$ gilt.

b) Seien $\{x_0; x_1; \ldots; x_m\}$ die Stützstellen, bzgl. derer die in **a)** bestimmte Funktion stückweise differenzierbar ist. Bestimmen Sie

$$\sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

c) Ist es in **a)** möglich, eine differenzierbare Funktion $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(a) = \gamma(b) \neq (1,0)$ sowie $\gamma' \neq 0$ zu finden?

Lösungsvorschlag



a) Definiere $f : [0,3] \to \mathbb{R}^2$ vermöge

$$f(t) := \begin{cases} (t,0) & \text{falls } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (1,t-1) & \text{falls } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ (3-t,3-t) & \text{falls } 2 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass f stückweise differenzierbar ist mit $f([0,3]) = A$.

b) Die Stützstellen in **a)** lauten $\{0;1;2;3\}$ Dann erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{2} \int_k^{k+1} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t + \int_1^2 1 \,\mathrm{d}t + \int_2^3 \sqrt{2} \,\mathrm{d}t = 2 + \sqrt{2}.$$

c) Sei nun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Funktion mit $\gamma([a,b]) = A$ und $\gamma(a) = \gamma(b) \neq (1,0)$. Bis auf Umparametrisierung dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass γ im positivem Sinne A umläuft. Da $\gamma([a,b]) = A$ gilt, gibt es ein $t_0 \in [a,b]$ mit $\gamma(t_0) = (1,0)$. Außerdem gibt es wegen der Stetigkeit von γ solche t_1, t_2 derart, dass für alle $t_1 < t < t_0$ $\gamma(t) = (\gamma_1(t), 0)$ und für alle $t_0 < t < t_2$ $\gamma(t) = (1, \gamma_2(t))$ gilt. Da γ in t_0 differenzierbar ist, so gilt

$$(\gamma_1'(t_0+), 0) = \lim_{t \to t_0-} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0+} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = (0, \gamma_2'(t_0-)).$$

Damit gilt $\gamma_1'(t_0+) = \gamma_2'(t_0-) = 0$ und daher $\gamma'(t_0) = (0,0)$. Daher lässt sich in **a)** niemals eine differenzierbare Funktion finden, deren Ableitung nicht in $(1,0)$ verschwindet.

Aufgabe 36 (Tutorium)

Sei

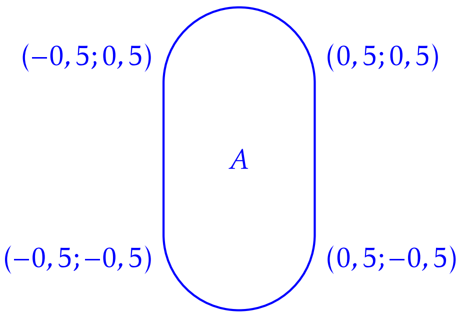
$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| |x| = \frac{1}{2}, |y| \leqslant \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + (|y| - 1/2)^2 = \frac{1}{4}, |y| \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

a) Bestimmen Sie eine reguläre Parametrisierung von A, welche A im positivem Sinne umlaufe, d.h., finden Sie eine reguläre Kurve, deren Spur gerade A ist und die A im positivem Sinne umläuft.

b) Bestimmen Sie die Kurvenlängen der in **a)** bestimmten Kurve.

c) Bestimmen Sie die natürliche Parametrisierung der in **a)** bestimmten Kurve.

Lösungsvorschlag



a) Definiere $\gamma : [0, 2+\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} (0,5; -0,5+t), & \text{falls } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (0,5\cos[2(t-1)]); 0,5+0,5\sin[2(t-1)], & \text{falls } 1 < t \leqslant 1+\pi/2, \\ (-0,5; 0,5-(t-1-\pi/2)), & \text{falls } 1+\pi/2 < t \leqslant 2+\pi/2, \\ (0,5\cos[2(t-2)]; -0,5+0,5\sin[2(t-2)]), & \text{falls } 2+\pi/2 < t \leqslant 2+\pi \end{cases}$$

für alle $t \in [0, 2+\pi]$. Es sei dem Leser überlassen, dass tatsächlich $\gamma \in \mathcal{C}^1$ gilt.

b),c) Es gilt für alle $t \in [0, 2+\pi]$ $\|\gamma'(t)\| = 1$, d.h., die Weglänge ist $2+\pi$ und γ ist bereits nach der Weglänge parametrisiert.