

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

7. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 37 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- b) Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f .
- c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v , für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = (\text{grad } f(0, 0)) \cdot v$? Ist f differenzierbar?

AUFGABE 38 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
- b) Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g .
- c) Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0, 0)$ stetig?
- d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v , für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = (\text{grad } g(0, 0)) \cdot v$? Ist g differenzierbar?

AUFGABE 39 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(x) \cos(y) \\ \sinh(x) \sin(y) \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (\log(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.
- b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass f auf dieser Menge nicht injektiv ist.

AUFGABE 40 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

AUFGABE 41 (ÜBUNG)

Es sei $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z > 1) \wedge (y + z > -1)\}$ und $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = \frac{1}{1 + y + z} + \log(x + y + z - 1)$$

für alle $(x, y, z) \in D$.

- a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U, V)$ existieren mit $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$ für alle $(x, y) \in U$ und alle $z \in V$. Bestimmen Sie außerdem $g'(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$.
- b) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein streng monoton fallendes $g_1 \in C^1(U_1, \mathbb{R})$ existieren mit $g(x, y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$.

AUFGABE 42 (TUTORIUM)

- a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $-2 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U, V)$ existieren mit

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$$

für alle $(x, y) \in U$ und alle $z \in V$. Berechnen Sie g' .

- b) Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

mit $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u, v \in C^1(U)$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ implizit definiert werden. Berechnen Sie $u'(0, 0)$ sowie $v'(0, 0)$.