Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

SS 2016
10.06.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0)) \cdot v$? Ist f differenzierbar?

Lösungsvorschlag

a) Klar: f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x,y) \neq (0,0)$. Ferner gilt

$$\left|\frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = |y|\left|\frac{y^2 - x^2}{x^2+y^2}\right| \leq |y| \frac{y^2 + x^2}{x^2 + y^2} = |y|$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Also ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$.

b) Für $(x,y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{-2x(x^2+y^2) - (y^2 - x^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 + 4x^2y^2 - x^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1.$$

c) Betrachte $(x_k, y_k) := (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = -\frac{4\frac{1}{k^4}}{4\frac{1}{k^4}} = -1 \not\to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig bei $(0,0)$.
Betrachte $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) = -\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = -1 \not\to 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Also ist auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ unstetig bei $(0,0)$.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f((0,0))}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3(v_y^3 - v_x^2 v_y)}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2}$$

Ferner ist $(\nabla f)(0,0) \cdot v = v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f)(0,0) \cdot v \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2} = v_y \\
&\Leftrightarrow \quad v_y^3 - v_x^2 v_y = v_x^2 v_y + v_y^3 \\
&\Leftrightarrow \quad v_x^2 v_y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad v_x = 0 \vee v_y = 0
\end{aligned}$$

Damit gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f)(0,0) \cdot v$ genau dann, wenn $v_x = 0$ oder $v_y = 0$ gilt. Insbesondere ist f nicht in $(0,0)$ differenzierbar, da sonst z.B. $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f)(0,0) \cdot v$ für $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ gelten müsste.

Aufgabe 38 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g.

c) Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} g(0,0)) \cdot v$? Ist f differenzierbar?

Lösungsvorschlag

a) Klar: g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x,y) \neq (0,0)$. Es ist $|\sin(x)| = \sin(|x|)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Ferner gilt $\sin(x) \leq x$ für alle $x \in [0, \infty)$. Es folgt

$$|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}| = \frac{\sin(|x^3+y^3|)}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{\overbrace{|x|^3+|y|^3}^{\leq 2\max\{x,y\}^3}}{\underbrace{x^2+y^2}_{\geq \max\{x,y\}^2}} \leq 2\max\{x,y\}$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$ mit $\max\{x,y\} \leq 1$. Wenn $\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \to 0$, so gilt sowohl $x \to 0$ als auch $y \to 0$, somit auch $\max\{x,y\} \to 0$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$. Also ist g stetig auf $\mathbb{R}^2$.

b) Wegen $g(x,y) = g(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, reicht es aus, lediglich $\frac{\partial g}{\partial x}$ auszurechnen. Es ist dann $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für $(x,y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)\cos(x^3+y^3) - 2x\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^3)}{h^3} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h^2\cos(h^3)}{3h^2} = 1.$$

c) Betrachte $(x_k, y_k) := (0, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) = 0\frac{1}{k^4} = 0 \not\to 1 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).$$

Also sind $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ unstetig bei $(0,0)$.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(tv)-g((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3(v_x^3+v_y^3))}{t^3(v_x^2+v_y^2)} \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{3t^2(v_x^3+v_y^3)\cos(t^3(v_x^3+v_y^3))}{3t^2(v_x^2+v_y^2)} = \frac{v_x^3+v_y^3}{v_x^2+v_y^2}\end{aligned}$$

Ferner ist $(\nabla g)(0,0) \cdot v = v_x + v_y$. Also gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\nabla g)(0,0)\cdot v \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{v_x^3+v_y^3}{v_x^2+v_y^2} = v_x + v_y \\ &\Leftrightarrow \quad v_x^3+v_y^3 = v_x^3+v_y^3+v_x^2v_y+v_xv_y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -v_x^2v_y = v_xv_y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad v_x = 0 \vee v_y = 0 \vee v_x = -v_y\end{aligned}$$

Analog zu **Aufgabe37 d)** argumentiert man nun, dass g nicht in $(0,0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe 39 (Übung)

Betrachten Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto\begin{pmatrix}\cosh(x)\cos(y)\\ \sinh(x)\sin(y)\end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U\ni(\log(2),\frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V\ni(0,\frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0,\frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x>0$ lokal invertierbar ist, aber dass f auf dieser Menge nicht injektiv ist.

Lösungsvorschlag

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sinh(x)\cos(y) & -\cosh(x)\sin(y)\\ \cosh(x)\sin(y) & \sinh(x)\cos(y)\end{pmatrix}$$

a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes (19.11) sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(\log(2),\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}\cosh(\log(2))\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \sinh(\log(2))\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(\log(2),\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{5}{4}\\ \frac{5}{4} & 0\end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0\\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}|\cdot\frac{4}{5}\\ |\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & \frac{4}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0\end{array}\right)$$

Also ist $f'\left(\log(2),\frac{\pi}{2}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}:V\to U$

$$(f^{-1})'\left(0,\frac{3}{4}\right)=(f^{-1})'\left(f\left(\log(2),\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[f'\left(\log(2),\frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & 0\end{pmatrix}$$

b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y))=\sinh^2(x)\cos^2(y)+\cosh^2(x)\sin^2(y)$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y)=0\Leftrightarrow y\in\pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y)=0\Leftrightarrow y\in\pi(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x,y))>0$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $x\neq 0$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x,y+2\pi) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y+2\pi) \\ \sinh(x)\sin(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (mit $x > 0$) ist f nicht injektiv.

Aufgabe 40 (Tutorium)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y) \\ -e^x\cos(y) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist, aber dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist.

Lösungsvorschlag

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2+\arctan(x))\cos(y) \\ -e^x\cos(y) & e^x\sin(y) \end{pmatrix}$$

a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes (19.11) sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(0))\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \cdot(-\frac{2}{3}) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \mid \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \mid \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right)$$

Also ist $f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$

$$(f^{-1})'\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (f^{-1})'\left(f\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[f'\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y)) = \frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2} + e^x(2+\arctan(x))\cos^2(y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden die $\sin^2$ bzw. $\cos^2$-Terme nie gleichzeitig verschwinden. Also ist $\det(f'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x,y+2\pi) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y+2\pi) \\ -e^x\cos(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\arctan(x))\sin(y) \\ -e^x\cos(y) \end{pmatrix} = f(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe 41 (Übung)

Es sei $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y+z>1) \wedge (y+z>-1)\right\}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = \frac{1}{1+y+z} + \log(x+y+z-1)$$

für alle $(x,y,z) \in D$.

a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(\frac{1}{\sqrt{e}},0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U,V)$ existieren mit $F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x,y)$ für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$. Bestimmen Sie außerdem $g'(\frac{1}{\sqrt{e}},0)$.

b) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein streng monoton fallendes $g_1 \in C^1(U_1,\mathbb{R})$ existieren mit $g(x,y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$.

Lösungsvorschlag

a) Klar: $F \in C^1(D)$. Ferner gilt

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0,1\right) = \frac{1}{1+0+1} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{e}}+0+1-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in D$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0,1\right) = -\frac{1}{(1+0+1)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}+0+1-1} = \sqrt{e} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (19.12), existieren U, V und g mit den geforderten Eigenschaften. Außerdem folgt

$$g'(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},0) = -(\frac{\partial F}{\partial z}(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},0,1))^{-1} \cdot (\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},0,1) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},0,1)) = -\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für die Ableitung g' gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(1+y+g(x,y))^2} - \frac{1}{x+y+g(x,y)-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+g(x,y)-1} & -\frac{1}{(1+y+g(x,y))^2} + \frac{1}{x+y+g(x,y)-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{x+y+g(x,y)-1}{(1+y+g(x,y))^2}-1} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{e}} + \varepsilon\right) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) =: U_1 \times U_2 \subseteq U$$

(dies funktioniert, weil U offen ist und $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) \in U$). Nach dem Hauptsatz der Analysis gilt für jedes $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$

$$g(x,y) = g(x,0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial y}(x,t)\,\mathrm{d}t = g(x,0) - y$$

Setze $g_1(x) := g(x,0)$ für alle $x \in U_1$. Klar: $g_1 \in C^1(U_1)$ und $g(x,y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$. Bleibt nachzuweisen, dass g_1 streng monoton fallend ist. Betrachte dazu

$$g_1'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = \frac{1}{\frac{x+0+g(x,0)-1}{(1+0+g(x,0))^2} - 1} = \frac{1}{\frac{x+g_1(x)-1}{(1+g_1(x))^2} - 1}$$

für alle $x \in U_1$. Insbesondere ist, wegen $g_1\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) = 1$, für $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ist

$$g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}+1-1}{(1+1)^2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{4\sqrt{e}} - 1}.$$

Das Vorzeichen des Nenners ist wegen $1 < \sqrt{e}$ bzw. $\frac{1}{4\sqrt{e}} < \frac{1}{4}$ negativ. Damit ist $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) < 0$. Da g_1' stetig ist, lässt sich ε nötigenfalls verkleinern, damit $g'(x) < 0$ für alle $x \in U_1$ gilt. Also ist g_1 in der Tat streng monoton fallend auf einer offenen Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1$.

Aufgabe 42 (Tutorium)

a) Sei $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine offene Menge $-2 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie ein $g \in C^1(U,V)$ existieren mit

$$F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x,y)$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$. Berechnen Sie g'.

b) Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

mit $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u, v \in C^1(U)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert werden. Berechnen Sie $u'(0,0)$ sowie $v'(0,0)$.

Lösungsvorschlag

a) Klar: $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Ferner gilt $F(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$, sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3yz + 3x^2 & -3xz - 3y^2 & 3z^2 + 4z - 3xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (19.12), existieren U, V und g mit den geforderten Eigenschaften. Für die Ableitung g' gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= -\frac{1}{3g^2(x,y) + 4g(x,y) - 3xy} \cdot \begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$.

b) Definiere $G:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$G(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Die Aufgabe besteht offenbar darin, die Gleichung $G(x,y,u,v) = 0$ in der Nähe des Punktes $(x,y,u,v) = (0,0,1,1)$ nach (u,v) aufzulösen.

Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Ferner gilt

$$G(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0^2 + 0^2 - (1)^2 + (1)^2 \\ 0^2 + 2\cdot 0^2 - 3\cdot(1)^2 + 4\cdot(1)^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{aligned} G'(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Versuche die (2×2)-Matrix $\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ zu invertieren:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)|I_2\right) &\sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ |\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \left(I_2 \middle| \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)\right)^{-1}\right) \end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (19.12) existiert eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, eine offene Menge $(1,1) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$, sowie ein $g \in C^1(U,V)$ mit

$$G(x,y,u,v) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $(u,v) \in V$. Für die Ableitung g' gilt

$$g'(x,y) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$. Insbesondere gilt für $(x,y) = (0,0)$

$$g'(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u'(0,0) = (0,0) = v'(0,0)$.