Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

SS 2016
17.06.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 43 (Übung)

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto xe^z - y^2$ in $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$.

b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

Lösungsvorschlag

a) Das zweite Taylorpolynom von f in x_0 ist gegeben durch ($h = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$)

$$(T_2(f,(x_0,y_0,z_0)))(x,y,z) := f(x_0,y_0,z_0) + h \cdot (\nabla f)(x_0,y_0,z_0) + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0,y_0,z_0) h.$$

Für f ergibt sich

$$(\nabla f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^z \\ -2y \\ xe^z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^z \\ 0 & -2 & 0 \\ e^z & 0 & xe^z \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$f(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad (\nabla f)(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich (schreibe $h = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$)

$$\begin{aligned}(T_2(f,(x_0,y_0,z_0)))(x,y,z) &= 0 + (x - x_0) + 2(y - y_0) + (z - z_0) + \frac{1}{2}(-2(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2(x - x_0)(z - z_0)) \\ &= \frac{1}{2} z^2 - y^2 + xz + x + 2.\end{aligned}$$

b) Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne g'. Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 - 3y & -3x + 6y^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $g'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von g. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} g'(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (6x^2 - 3y = 0) \wedge (-3x + 6y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 2y^2) \wedge (6x^2 = 3y) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = 2y^2) \wedge (24y^4 = 3y) \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee \left(x = y = \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Also sind $(x_0,y_0) = (0,0)$ und $(x_1,y_1) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ genau die kritischen Punkte von g.

Berechne nun H_g. Es ist

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Untersuche $H_g(x_0,y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_A ist durch

  $$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3^2 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind ± 3 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A indefinit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat g in (x_0,y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

- Untersuche $H_g(x_1,y_1) =: B$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_B ist durch

  $$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)^2 - 3^2 = (3 - \lambda)(9 - \lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 3 und 9 die Eigenwerte von B. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also B positiv definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat g in (x_1,y_1) ein lokales Minimum.

Aufgabe 44 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^y$ in $(x_0,y_0) = (1,3)$.

b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiligen Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

(i) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy + x - 2y - 2$

(ii) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (2x + 2y + 3)e^{-x^2 - y^2}$

Lösungsvorschlag

a) Das zweite Taylorpolynom von f in x_0 ist gegeben durch ($h = (x - x_0, y - y_0)$)

$$(T_2(f,(x_0,y_0)))(x,y) := f(x_0,y_0) + h \cdot (\nabla f)(x_0,y_0) + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0,y_0) h.$$

Für f ergibt sich

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} x^{y-1}y \\ -x^y \log(x) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} x^{y-2}(y^2-y) & x^{y-1}(y\log(x)+1) \\ x^{y-1}(y\log(x)+1) & x^y(\log(x))^2 \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$f(x_0,y_0) = 1, \qquad (\nabla f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich (schreibe $h = (x-x_0, y-y_0)$)

$$(T_2(f,(x_0,y_0)))(x,y) = 1 + 3(x-x_0) + \frac{1}{2}(6(x-x_0)^2 + 2(x-x_0)(y-y_0)) = 3x^2 + xy - 6x - y + 4.$$

b) (i) Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne g'. Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 & x-2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $g'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von g. Also ist $(x_0,y_0) = (2,-1)$ der einzige kritische Punkt von g.

Berechne nun $H_g(x_0,y_0)$. Es ist

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuche $H_g(x_0,y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit. Das charakteristische Polynom p_A ist durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind ± 1 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A indefinit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat f in (x_0,y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

(ii) Klar: $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne h'. Es ist

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = 2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - x(2x+2y+3) & 1 - y(2x+2y+3) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach Satz 19.17 der Vorlesung ist $h'(x_0,y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von h. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned}
h'(x,y)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(2x+2y+3)=y(2x+2y+3)=1\\
&\Leftrightarrow \quad (x=y\neq 0)\wedge(x(2x+2x+3)=1)\\
&\Leftrightarrow \quad (x=y\neq 0)\wedge\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=0\right)\\
&\Leftrightarrow \quad (x=y)\wedge\left(x\in\left\{-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{9}{64}+\frac{1}{4}},-\frac{3}{8}-\sqrt{\frac{9}{64}+\frac{1}{4}}\right\}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad (x=y)\wedge\left(x\in\left\{-1,\frac{1}{4}\right\}\right)
\end{aligned}$$

Also sind $(x_0,y_0)=(-1,-1)$ und $(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ genau die kritischen Punkte von h. Berechne nun H_h. Es ist

$$\begin{aligned}
H_h(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\\
&= 2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 4x^3+4x^2y+6x^2-6x-2y-3 & 4x^2y+4xy^2+6xy-2x-2y\\ 4x^2y+4xy^2+6xy-2x-2y & 4y^3+4xy^2+6y^2-2x-6y-3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
H_h(x,x) &= 2e^{-2x^2}\begin{pmatrix} 8x^3+6x^2-8x-3 & 8x^3+6x^2-4x\\ 8x^3+6x^2-4x & 8x^3+6x^2-8x-3\end{pmatrix}\\
&= 2e^{-2x^2}\begin{pmatrix} 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-3 & 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\\ 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) & 8x\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ und

$$H_h(x_0,y_0)=\frac{2}{e^2}\underbrace{\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}}_{=:A} \qquad \text{und} \qquad H_h(x_1,y_1)=-\frac{1}{\sqrt[8]{e}}\underbrace{\begin{pmatrix}9 & 1\\ 1 & 9\end{pmatrix}}_{=:B}.$$

- Untersuche A durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_A ist durch

  $$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-2^2=(1-\lambda)(5-\lambda)$$

  für alle $\lambda\in\mathbb{C}$ gegeben. Also sind 1 und 5 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also A positiv definit. Damit ist auch $H_h(x_0,y_0)$ positiv definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat h in (x_0,y_0) ein lokales Minimum.

- Untersuche B durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_B ist durch

  $$p_B(\lambda)=\det(B-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}9-\lambda & 1\\ 1 & 9-\lambda\end{vmatrix}=(9-\lambda)^2-1^2=(8-\lambda)(10-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 8 und 10 die Eigenwerte von B. Nach der Charakterisierung aus Satz 18.12 der Vorlesung ist also B positiv definit. Damit ist $H_h(x_1, y_1)$ negativ definit. Nach Satz 19.17 der Vorlesung hat h in (x_1, y_1) ein lokales Maximum.

Aufgabe 45 (Übung)

Es seien

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 = 6\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 5\right\}.$$

Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in A$ und ein y_0 in B existiert, mit

$$\|x_0 - y_0\| = d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

Berechnen Sie den Wert von $d(A, B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

Lösungsvorschlag

Vorgeplänkel: Wir würden gerne die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\|$ unter der Nebenbedingung $\tilde{\varphi}$ mit

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \\ y_1 + y_2 - 5 \end{pmatrix}$$

minimieren. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange in der Fassung, wie sie in der Vorlesung behandelt wurde, anwenden zu können bzw. um überhaupt die Existenz von lokalen Extrema zu sichern, müsste $\tilde{\varphi}^{-1}(\{0\})$ kompakt sein. Da jedoch gerade

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\{0\}) \; = \; A \times B \; = \; \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x_1^2 + 2x_2^2 = 6 \wedge y_1 + y_2 = 5\}$$

gilt und dies unbeschränkt (in der dritten und vierten Komponente) ist, könnten wir nicht die Existenz von Extrema von $\tilde{f}$ auf $\tilde{\varphi}^{-1}(\{0\})$ sichern. Stattdessen werden wir sehen, dass es genügt, $\tilde{f}$ auf einer kompakten Teilmenge von $\tilde{\varphi}^{-1}(\{0\})$ zu betrachten.
Seien $x = (2, 1) \in A$ und $y = (4, 1) \in B$. Damit ist $\|x - y\| = 2 \geqslant d(A, B)$. Ferner gilt für alle $x = (x_1, x_2) \in A$

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_1^2 + 2x_2^2 = 6 < 9,$$

also $\|x\| < 3$. Ferner gilt für alle $y \in B$ mit $\|y\| > 5$

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\|| = \|y\| - \|x\| > 5 - 3 = 2 \geqslant d(A, B).$$

Ist $\|x\|^2 + \|y\|^2 > 36$, so ist nach Obigem $\|y\|^2 > 36 - \|x\|^2 > 25$, also $\|y\| > 5$ und $\|x - y\| > 2$. Das heißt gerade

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \; = \; \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B, \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 \leqslant 6}} \|x - y\|. \tag{1}$$

Definieren wir also

$$D \; := \; D(0, \sqrt{6}) \; := \; \{v \in \mathbb{R}^4 \, : \, \|v\| \leqslant \sqrt{6}\},$$

so ist D als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ nach Abschnitt 19.18 der Vorlesung kompakt. Dann definieren wir

$$f : D \to \mathbb{R}, \; (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\|^2$$

sowie

$$\varphi : D \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \\ y_1 + y_2 - 5 \end{pmatrix}.$$

Dann gelten $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Außerdem gilt nach Definition und dem oben Gesehenen

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| \ = \ \min(\sqrt{} \circ f)(\varphi^{-1}(\{0\})).$$

Man beachte, dass dies lediglich die Umformulierung von (1) mithilfe der eingeführten Funktionen ist. Wie bereits im Vorgeplänkel erwähnt und wie sich leicht nachrechnen lässt, ist $T := \varphi^{-1}(\{0\})$ als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ kompakt. Damit existiert wegen der Stetigkeit von f ein $a \in T$ derart, dass $f(a) = \min f(T)$. Die Multiplikatorenregel von Lagrange sagt nur etwas über lokale Extrema unter Nebenbedingungen aus. Per definitionem sind diese sogenannte *innere Punkte* von D (Bezeichnung wie in der Vorlesung), d.h., es muss sich zu einem solchen lokalen Extremum v (unter gegebenen Nebenbedingungen) einen Radius $r > 0$ derart geben, dass insbesondere $U_r(v) \subseteq D$ gilt. Wie sich leicht nachrechnen lässt, ist die Menge aller inneren Punkte von D gerade $U_{\sqrt{6}}(0) \subseteq \mathbb{R}^4$. Falls $\|a\| < \sqrt{6}$, so gilt zunächst

$$\varphi'(a) \ = \ \begin{pmatrix} 2a_1 & 4a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $0 = \varphi_1(a) = a_1^2 + 2a_2^2 - 6$ gilt $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ und insbesondere $Rang(\varphi'(a)) = 2$. Da a ein innerer Punkt von D ist, existiert nach der Multiplikatorenregel von Lagrange ein $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ derart, dass

$$f'(a) \ = \ -\lambda^T \varphi'(a)$$

sowie $\varphi(a) = 0$ gilt. Ausgeschrieben lauten diese Bedingungen

$$\begin{aligned} 2(a_1 - a_3) &= -2\lambda_1 a_1, && (2) \\ 2(a_2 - a_4) &= -4\lambda_1 a_2, && (3) \\ -2(a_1 - a_3) &= -\lambda_2, && (4) \\ -2(a_2 - a_4) &= -\lambda_2, && (5) \\ a_1^2 + 2a_2^2 &= 6, && (6) \\ a_3 + a_4 &= 5. && (7) \end{aligned}$$

Wäre $\lambda_1 = 0$, so gälten $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$. Zusammen mit den Gleichungen (6) und (7) erhalten wir

$$a_3^2 + 2(5 - a_3)^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3a_3^2 - 20a_3 + 44 = 0.$$

Da die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung wegen $400 - 4 \cdot 3 \cdot 44 < 0$ negativ ist, erhalten wir keine (reelle) Lösung für a_3. Damit ist $\lambda_1 \neq 0$. Einsetzen von (2) in (4) und (3) in (5) liefert

$$2\lambda_1 a_1 \ = \ -\lambda_2 \ = \ 4\lambda_1 a_2,$$

also insbesondere $a_1 = 2a_2$. Dies eingesetzt in (6) ergibt $a_2 \in \{\pm 1\}$. Dann liefert Subtrahieren von (4) und (5) zusammen mit (7) $0 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = a_2 - 2a_3 + 5$, d.h., $a_3 = \frac{5+a_2}{2}$. Dies in (7) eingesetzt liefert wiederum $a_4 = \frac{5-a_2}{2}$. Damit erhalten wir insgesamt $a \in \{(-2,-1,2,3), (2,1,3,2)\}$. Es gilt $f(-2,-1,2,3) = 32 > 2 = f(2,1,3,2)$, d.h. $(-2,-1,2,3)$ ist auf jeden Fall nicht das globale Maximum.
Es gilt also $d(A,B) \leqslant \sqrt{2}$. Wir wollen nun ausschließen, dass das globale Minimum sich auf der Kugelschale $\{\|v\| = 6\} \subseteq \mathbb{R}^4$ befindet. Dazu wollen wir nochmal dieselbe Überlegung wie anfangs

bemühen und zeigen, dass sich das globale Minimum bereits in der Kugel mit Radius $5 > \sqrt{18} = \|(2,1,3,2)\|$ befindet. Für alle $x = (x_1, x_2) \in A$, $y = (y_1, y_2) \in B$ mit $\|(x_1, x_2, y_1, y_2)\| \geqslant 5$ gilt zunächst wie oben $\|x\|^2 \leqslant x_1^2 + 2x_2^2 \leqslant 6$. Dann erhalten wir wie oben $\|y\|^2 > 25 - \|x\|^2 \geqslant 19$ und daher

$$\|x-y\| \geqslant \|y\| - \|x\| \geqslant \sqrt{19} - \sqrt{6} = \frac{(19-6)/2}{(\sqrt{19}^2 + \sqrt{6}^2)/2} \geqslant \frac{13/2}{5/\sqrt{2}} = \frac{13}{10}\sqrt{2} > \sqrt{2} \geqslant d(A,B).$$

Dabei haben wir die sog. *arithmetisches-quadratisches-Mittel-Ungleichung* verwendet, die $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ für alle $a, b \geqslant 0$ besagt. Die Aussage folgt leicht mithilfe der binomischen Formeln.
Insgesamt haben wir also $d(A,B) = \sqrt{2}$ bewiesen.

Aufgabe 46 (Tutorium)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := (x+y+z)^2 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

und der Ellipsoid

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1\}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\max(f(C))$ und $\min(f(C))$.

Lösungsvorschlag

Wir definieren $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $h(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1$. Dann ist $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $C = h^{-1}(\{0\})$. Da $\{0\}$ abgeschlossen und h stetig ist, ist C abgeschlossen. Außerdem gilt für $(x,y,z) \in C$, dass

$$\|(x,y,z)\| = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \leq \left(x^2 + 2y^2 + 2z^2\right)^{1/2} = 1.$$

Damit ist C beschränkt und nach Satz 19.8 daher insgesamt kompakt. Da f stetig ist, existieren somit $a, b \in C$ mit $f(a) = \min(f(C))$ und $f(b) = \max(f(C))$.
Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt $\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix}$. Folglich haben wir die Äquivalenz

$$\nabla h(x,y,z) \text{ hat vollen Rang.} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} =: M.$$

Es gilt $f, h \in C^1(M, \mathbb{R})$ und $C \subset M$. Somit existiert für jedes Extremum (x_0, y_0, z_0) mit der Nebenbedingung $h(x_0, y_0, z_0) = 0$ ein Lagrangemultiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = -\lambda \nabla h(x_0, y_0, z_0) \iff (x_0 + y_0 + z_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Wir schreiben dies als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+2\lambda \end{pmatrix}}_{=:A(\lambda)} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

und stellen fest, dass

$$\begin{aligned}
\det(A(\lambda)) &= (1+\lambda)(1+2\lambda)^2 + 1 + 1 - (1+\lambda) - 2(1+2\lambda) \\
&= (1+\lambda)(1+4\lambda+4\lambda^2) - 1 - 5\lambda \\
&= 8\lambda^2 + 4\lambda^3 \\
&= 4\lambda^2(\lambda+2)
\end{aligned}$$

gilt. Damit folgt:

$$A(\lambda) \text{ ist invertierbar.} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \notin \{-2, 0\}.$$

Für $\lambda \notin \{0, -2\}$ löst also nur $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ die Gleichung (9). Da aber $(0, 0, 0) \notin C$ gilt, folgt $\lambda \in \{-2, 0\}$ in jedem Extremum von f auf C.
Sei $\lambda = -2$. Durch Gaußumformungen erhält man

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(x_0, y_0, z_0) löst Gleichung (9) also genau dann, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in C \quad &\Longleftrightarrow \quad h\Bigg(\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (2\alpha)^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \Big\{-\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$L_{-2} := \Bigg\{-\frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg\}.$$

Sei $\lambda = 0$. Dann folgt mit Gleichung (8) die Identität $x_0 + y_0 + z_0 = 0$. Dann haben wir für jedes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) \geq 0 = f(x_0, y_0, z_0).$$

f hat auf C somit das Minimum 0, falls

$$L_0 := C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

nicht leer ist. Dies ist der Fall, da $v_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in L_0$ gilt.
Als mögliche Punkte für die Extrema von f auf C kommen nach den bisherigen Überlegungen nur die Elemente von L_{-2} und L_0 in Frage. Für $v \in L_0$ gilt $f(v) = 0$ und für $v \in L_{-2}$ erhält man durch Einsetzen $f(v) = 2$. Damit ergibt sich insgesamt $\min(f(C)) = 0$ und $\max(f(C)) = 2$.

Aufgabe 47 (Übung)

Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := 4x^2 - 3xy \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

auf der Menge

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Lösungsvorschlag

Wir untersuchen $f \in C^2(\mathbb{R}^2, R)$ zunächst auf lokale Extremstellen in $U_1(0)$. Dazu berechnen wir

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Für die Hessematrix von f gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

was somit auch die Matrix $A := H_f(0,0)$ ist. Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(8-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda + 1).$$

Somit sind die Eigenwerte von A gegeben durch 9 und -1, wodurch die Matrix indefinit ist. f hat somit in $(0,0)$ kein lokales Extremum.
Wir stellen zunächst fest, dass f auf D sein Maximum und Minimum annimmt, da D abgeschlossen (betrachte konvergente Folge in D) und beschränkt ($\|(x,y)\| \leqslant 1$) ist. Für die lokalen Extrema auf

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

nutzen wir die Multiplikatorenregel von Lagrange aus. Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Dann ist $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $T = \varphi^{-1}(\{0\})$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion h abgeschlossen. Wegen $\|(x,y)\| = 1$ für $(x,y) \in T$ ist T auch beschränkt, also nach Satz 19.18 kompakt, wodurch f auf T sein Maximum und Minimum annimmt. Es gilt

$$\varphi'(x,y) = (2x, 2y),$$

wodurch φ' auf ganz T vollen Rang hat, da $(0,0) \notin T$. Für jedes lokale Extremum (x_0, y_0) von f auf T (also $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$) existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$f'(x_0, y_0) = -\lambda_0 \varphi'(x_0, y_0),$$

womit sich die Gleichungen

$$8x_0 - 3y_0 = -2\lambda_0 x_0 \tag{10}$$

$$-3x_0 = -2\lambda_0 y_0 \tag{11}$$

ergeben neben

$$x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0 \tag{12}$$

Umgeformt ergibt sich aus (10) und (11)

$$(8 + 2\lambda_0)x_0 - 3y_0 = 0 \tag{13}$$

$$x_0 = \frac{2}{3}\lambda_0 y_0 \tag{14}$$

Einsetzen von (14) in (13) liefert

$$\frac{y_0}{3}(4\lambda_0^2 + 16\lambda_0 - 9) = 0$$

Wäre $y_0 = 0$, so nach (14) auch x_0. Dies widerspricht jedoch (12). Somit muss der Klammerausdruck 0 ergeben, was genau für $\lambda_0 \in \{\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\}$ der Fall ist. Einsetzen in (14) und danach in (12) ergibt die vier Punkte

$$(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}}), \qquad (\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}}).$$

Durch Einsetzen der Punkte erkennen wir

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}}) = -\frac{1}{2},$$

$$f(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}}) = \frac{9}{2}.$$

Da f auf $D \setminus T$ keine lokalen Extrema besitzt, ergibt sich schließlich:
Lokale Minima von f auf D: $(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}})$.
Lokale Maxima von f auf D: $(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}})$.

Aufgabe 48 (Tutorium)

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) := 5x + y - 3z$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ auf der Menge

$$E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z=0) \wedge (x^2+y^2+z^2=1)\Big\}.$$

Lösungsvorschlag

Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Klar: $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $E = h^{-1}(\{0\})$. Da h stetig ist und $\{0\}$ abgeschlossen, ist E abgeschlossen. Wegen $\|(x,y,z)\| = 1$ für jedes $(x,y,z) \in E$, ist E beschränkt. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung ist also E kompakt. Ebenfalls nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung, existieren ein $v_1, v_2 \in E$ mit

$$f(v_1) \leqslant f(v) \leqslant f(v_2)$$

für alle $v \in E$. Damit ist die Existenz der globalen Extrema von f auf E gesichert.
Da jede Stelle eines globalen Extremums auch eine Stelle eines lokalen Extremums ist, bietet es sich an diese mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange (vgl. Abschnitt 19.19 der Vorlesung) zu identifizieren: Es ist

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Also kann $h'(x,y,z)$ nur für $x = y = z$ nicht den vollen Rang haben. Aber für jedes $(x,y,z) \in E$ gilt $x = y = z \Rightarrow x = y = z = 0$, was ein Widerspruch zu $\|(x,y,z)\| = 1$ darstellt. Also hat h' auf E den vollen Rang 2. Es existiert $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f'(v_i) = -\lambda^T h'(v_i)$$

für $i \in \{1,2\}$. Zusammen mit der Nebenbedingung $h(v_i) = 0$, ergibt es die folgenden fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} 5 &= -\lambda_1^0 - 2x\lambda_2^0 && (15)\\ 1 &= -\lambda_1^0 - 2y\lambda_2^0 && (16)\\ -3 &= -\lambda_1^0 - 2z\lambda_2^0 && (17)\\ 0 &= x+y+z && (18)\\ 1 &= x^2+y^2+z^2 && (19) \end{aligned}$$

Addition von (15), (16) und (17), sowie Ausnutzung von (18) liefert $3 = -3\lambda_1^0$, also

$$\lambda_1^0 = -1. \tag{20}$$

Einsetzen in (15) impliziert $2 = -x\lambda_2^0$, also $\lambda_2^0 \neq 0$. Einsetzen von (20) in (16) liefert

$$y = 0. \tag{21}$$

Mit (18) folgt dann sofort

$$z = -x. \tag{22}$$

Durch (19) folgt

$$x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}. \tag{23}$$

Es ist also

$$v_i \in \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

für $i \in \{1,2\}$. Es ist $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}$ und $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$, also

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\\ v_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$