

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

9. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 49 (ÜBUNG)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(x) \, ds$ für

(i) $r > 0$ und $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$ sowie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \arccos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{y}{r}$.

(ii) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \log(1+t^2) \\ 2 \arctan(t) - t + 3 \end{pmatrix}$ mit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := ye^{-x}$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$.

(ii) $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ ze^x \\ xy \log(z) \end{pmatrix}$.

AUFGABE 50 (TUTORIUM)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(x) \, ds$ für

(i) $r > 0$ und $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := y$.

(ii) $\gamma : [0, \log(5)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := x$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := \begin{pmatrix} e^y + \cos(x) \cos(y) \\ xe^y - \sin(x) \sin(y) \end{pmatrix}$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 51 (ÜBUNG)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx.$$

a) $f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ xy \end{pmatrix}, \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$

b) $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \gamma : \left[0, \frac{19}{4}\pi\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \frac{4\sqrt{2}t}{19\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}.$

AUFGABE 52 (TUTORIUM)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(x) \cdot dx.$$

a) $f(x, y, z) = e^{-xz} \begin{pmatrix} 2x - x^2z - 5zy^3 \\ 15y^2 \\ -x^3 - 5xy^3 \end{pmatrix}, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 - t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix},$

b) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}, \gamma : [0, \log(2)] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}.$

AUFGABE 53 (ÜBUNG)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} d(x, y), A := [0, 1]^2,$

(ii) $\int_B (xy + y^2) d(x, y), B := [0, 1]^2.$

b) Zeigen Sie für messbare Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$: $c_{A \cap B}(x) = c_A(x)c_B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen:

(i) $M_{f,0}$, wobei $f : [0, 1] \times [1, \sqrt{3}], (x, y) \mapsto \frac{1}{(x+y^2)^2},$

(ii) $S_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \leq i \leq n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}, n \in \mathbb{N}$ (n -dim. Standardsimplex).

AUFGABE 54 (TUTORIUM)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} d(x, y), A = [1, 2] \times [3, 4],$

(ii) $\int_B y \sin(xy) d(x, y), B = [0, 1] \times [0, \pi/2],$

(iii) $\int_C \frac{x^2 z^3}{1+y^2} d(x, y, z), C = [0, 1]^3,$

(iv) $\int_D \sin(x+y+z) d(x, y, z), D = [0, \pi]^3.$

b) Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

(i) $M_{f,g}$, wobei $f, g : [1, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := e^{x+y}, g(x, y) := x^2 y$ für alle $(x, y) \in [1, 2]^2,$

(ii) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq ye^{-x} \leq b, c \leq y \leq e^x \leq d\}, 0 < a < b < c < d$

(iii) $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}.$

Hinweis zu (i): Zeigen Sie zunächst, dass $g \leq f$ auf $[1, 2]^2$ gilt.