Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
24.06.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 49 (Übung)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s$ für

(i) $r>0$ und $\gamma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t):=\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t\end{pmatrix}$ sowie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y):=\arccos\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{y}{r}$.

(ii) $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t):=\begin{pmatrix}\log(1+t^2)\\ 2\arctan(t)-t+3\end{pmatrix}$ mit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y):=y\mathrm{e}^{-x}$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z):=\begin{pmatrix} y^2+2xz\\ z^2+2xy\\ x^2+2yz\end{pmatrix}$.

(ii) $f:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z>0\}\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z):=\begin{pmatrix} x^2y\\ z\mathrm{e}^x\\ xy\log(z)\end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Es gilt

$$\gamma'(t)=\begin{pmatrix}-r\sin(t)\\ r\cos(t)\end{pmatrix}\qquad \forall t\in[0,\pi].$$

Somit folgt $\|\gamma'(t)\|=r$ für alle $t\in[0,\pi]$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s=\int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t=r\int_0^\pi \arccos(\cos(t))+\sin(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=r[\frac{t^2}{2}-\cos(t)]_{t=0}^{\pi}=r(\frac{\pi^2}{2}+2).$$

(ii) Es gilt

$$\gamma'(t)=\begin{pmatrix}\frac{2t}{1+t^2}\\ \frac{2}{1+t^2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2t}{1+t^2}\\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{pmatrix}\qquad \forall t\in[0,1].$$

Somit folgt $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}} = 1$ für alle $t \in [0,1]$ und für das gesuchte Integral folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2\arctan(t) - t + 3)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2\cdot\frac{1}{1+t^2}\arctan(t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= [(\arctan(t))^2 - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + 3\arctan(t)]_{t=0}^1 = \frac{1}{16}(\pi^2 + 12\pi - 8\log(2)).
\end{aligned}$$

b) (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$ hat auf $\mathbb{R}^3$ die Stammfunktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2$.

Wir werden diese Stammfunktion nun berechnen. Das folgende Vorgehen ist dabei aber nicht als formal korrekte Rechnung zu verstehen, vielmehr soll es veranschaulichen wie man einen Kandidaten für die Stammfunktion ermittelt. Gesucht ist eine Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\operatorname{grad} F)(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

gilt, wobei f_i für $i \in \{1,2,3\}$ die Komponentenfunktionen von f darstellen. Dies schreiben wir in das Gleichungssystem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = y^2 + 2xz, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = z^2 + 2xy, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x^2 + 2yz. \tag{3}$$

Integriert man (1) in der x-Variablen, erhält man

$$F(x,y,z) = \int \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \int y^2 + 2xz\,\mathrm{d}x = xy^2 + x^2z + c_1(y,z),$$

wobei die Konstante $c_1(y,z)$ von y und z abhängen kann, da wir nur in x integrieren und diesbezüglich y und z als "Konstanten" einzustufen sind. Integrieren wir (2) nach y und (3) nach z erhalten wir

$$F(x,y,z) = xy^2 + c_2(x,z) + yz^2 \quad \text{und} \quad F(x,y,z) = c_3(x,y) + x^2z + yz^2.$$

An dieser Stelle vergleicht man die drei Gleichungen für $F(x,y,z)$ und wird schnell feststellen, dass

$$c_1(y,z) = yz^2 \quad \text{und} \quad c_2(x,z) = x^2z \quad \text{und} \quad c_3(x,y) = xy^2$$

eine Möglichkeit ist, diese Gleichungen zu erfüllen. Unser Kandidat lautet daher $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2$.

Dann ist $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(\operatorname{grad} F)(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix} = f(x,y,z).$$

Folglich ist F die gesuchte Stammfunktion.

(ii) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^3$ mit $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\}$ und $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2y \\ ze^x \\ xy\log(z) \end{pmatrix}$ hat auf D keine Stammfunktion.

D ist ein Gebiet und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Für $(x,y,z) \in D$ gilt

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ ze^x & 0 & e^x \\ y\log(z) & x\log(z) & \frac{xy}{z} \end{pmatrix}$$

und damit ist $J_f(x,y,z)$ nicht symmetrisch und f hat nach Satz 19.21 keine Stammfunktion auf D, da die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

Aufgabe 50 (Tutorium)

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s$ für

(i) $r > 0$ und $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := y$.

(ii) $\gamma : [0, \log(5)] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \frac{\mathrm{e}^t}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x$.

b) Überprüfen Sie jeweils, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich eine Stammfunktion besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y + \cos(x)\cos(y) \\ x\mathrm{e}^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0,\pi].$$

Somit folgt $\|\gamma'(t)\| = r$ für alle $t \in [0,\pi]$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = r^2\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = r^2[-\cos(t)]_{t=0}^{\pi} = 2r^2.$$

(ii) Es gilt

$$\gamma'(t) = \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix}\cos(t)-\sin(t)\\ \sin(t)+\cos(t)\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, \log(5)].$$

Somit folgt $\|\gamma'(t)\| = \frac{e^t}{2}\sqrt{(\cos(t)-\sin(t))^2+(\sin(t)+\cos(t))^2+2} = e^t$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\log(5)} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\log(5)} e^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Es gilt

$$\int e^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t \overset{P.I.}{=} e^{2t}\sin(t) - 2\int e^{2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t \overset{P.I.}{=} e^{2t}\sin(t) + 2e^{2t}\cos(t) - 4\int e^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t,$$

wodurch sich

$$\int e^{2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{2t}}{5}(\sin(t)+2\cos(t))$$

ergibt, was

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{10}[e^{2t}(\sin(t)+2\cos(t)]_{t=0}^{\log(5)} = \frac{5}{2}(\sin(\log(5))+2\cos(\log(5))) - \frac{1}{5}.$$

b) (i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) := \begin{pmatrix} e^y+\cos(x)\cos(y)\\ xe^y-\sin(x)\sin(y)\end{pmatrix}$ hat auf $\mathbb{R}^2$ die Stammfunktion $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) := xe^y+\sin(x)\cos(y)$.
Da $F\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt, dass

$$(\operatorname{grad} F)(x,y) = \begin{pmatrix} e^y+\cos(x)\cos(y)\\ xe^y-\sin(x)\sin(y)\end{pmatrix} = f(x,y)$$

ist F die gesuchte Stammfunktion. Den Kandidaten für die Stammfunktion findet man mit dem Vorgehen aus **Aufgabe 49 b)** (i).

(ii) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2+2xyz^3\\ 2y+x^2z^3\\ y^2+3x^2yz^2\end{pmatrix}$ hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^3$.
$\mathbb{R}^3$ ist ein sternförmiges Gebiet, $f\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ und für $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ gilt

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2yz^3 & 2y+2xz^3 & 6xyz^2\\ 2xz^3 & 2 & 3x^2z^2\\ 6xyz^2 & 2y+3x^2z^2 & 6x^2yz\end{pmatrix}.$$

Wie man schnell feststellt ist dies keine symmetrische Matrix und daher sind die Integrabilitätsbedingungen auf $\mathbb{R}^3$ nicht erfüllt. Nach **Satz 19.21** hat f also keine Stammfunktion.

Aufgabe 51 (Übung)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x.$$

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ xy \end{pmatrix}$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$,

b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$, $\gamma : \left[0, \frac{19}{4}\pi\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \frac{4\sqrt{2t}}{19\pi}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) Wegen $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y \neq x\mathrm{e}^{xy} = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$ z.B. für $y = x \neq 0$ gilt, müssen wir das Wegintegral mithilfe der Definition ausrechnen. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (e^{\cos(t)\sin(t)}, \cos(t)\sin(t))\cdot(-\sin(t), \cos(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t) - \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi} \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{t=\tau+\pi}{=} \left[-\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t)e^{\cos(t)\sin(t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \sin(\tau)e^{\cos(\tau)\sin(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = 0.
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2x = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 19.25 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab (19.24). Es ist

$$\gamma(0) = (0,0), \quad \gamma\left(\frac{19}{4}\pi\right) = (-1, 2).$$

Wie sich wie oben nachrechnen lässt, definiert $F(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}y^3$ eine Stammfunktion von f. Damit gilt

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x = F(\gamma(\frac{19}{4}\pi)) - F(\gamma(0)) = \frac{14}{3}.$$

Aufgabe 52 (Tutorium)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, \mathrm{d}x.$$

a) $f(x,y,z) = e^{-xz}\begin{pmatrix} 2x - x^2z - 5zy^3 \\ 15y^2 \\ -x^3 - 5xy^3 \end{pmatrix}$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 - t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$,

b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$, $\gamma : [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) &= -15y^2 z e^{-xz} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) \\
\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) &= (-3x^2 - 5y^3 + x^3 z + 5xy^3 z)e^{-xz} = \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\
\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) &= -15xy^2 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)
\end{aligned}$$

für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und f ein C^1-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 19.25 der Vorlesung, dass f ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab (19.24). Es ist

$$\gamma(0) = (0,0,0), \quad \gamma(1) = (1,0,0).$$

Wähle also $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (t,0,0)$. Es gilt:

$$\int_\gamma f(x) \cdot \,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} f(x) \cdot \,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 1$$

b) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x) \cdot \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\log(2)} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t)) \cdot (\cosh(t), \sinh(t), \cosh(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \sinh(t)\cosh(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\log(2)} 1 + \sinh(t)\cosh(t)\,\mathrm{d}t = \log(2) + \frac{1}{2}\left[\sinh^2(t)\right]_{t=0}^{t=\log(2)} = \log(2) + \frac{9}{32}
\end{aligned}$$

Aufgabe 53 (Übung)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}(x,y)$, $A := [0,1]^2$,

(ii) $\int_B (xy + y^2)\,\mathrm{d}(x,y)$, $B := [0,1]^2$.

b) Zeigen Sie für messbare Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$: $\quad c_{A\cap B}(x) = c_A(x)c_B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen:

(i) $M_{f,0}$, wobei $f : [0,1] \times [1, \sqrt{3}], (x,y) \mapsto \frac{1}{(x+y^2)^2}$,

(ii) $S_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall 1 \leqslant i \leqslant n : x_i \geqslant 0\,, \sum_{i=1}^n x_i \leqslant 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ (*n-dim. Standardsimplex*).

Lösungsvorschlag

a) (i) Da der Integrand stetig ist, können wir den **Satz von Fubini (20.3)** anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x \\
&= [\mathrm{Arsinh}(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \mathrm{Arsinh}(1) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{Arsinh}(1) - [\mathrm{Arsinh}(y)]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\
&= \mathrm{Arsinh}(1) - \mathrm{Arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

(ii) Da der Integrand stetig ist, können wir den **Satz von Fubini (20.3)** anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_B xy+y^2\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_0^1 xy+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 [\frac{x^2y}{2}+xy^2]_{x=0}^1\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{2}+y^2\,\mathrm{d}y \\
&= [\frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{3}]_{y=0}^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathbb{R}^n$ messbar und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$c_{A\cap B}(x) = 1 \iff x \in A\cap B \iff x \in A \wedge x \in B \iff c_A(x) = 1 \wedge c_B(x) = 1 \iff c_A(x)c_B(x) = 1.$$

Da charakteristische Funktionen, sowie deren Produkte, nur die Werte 0 und 1 annehmen, ist die Aussage somit gezeigt.

c) (i) Da f auf seinem Definitionsbereich positiv ist, ist $M_{f,0}$ korrekt definiert. Es gilt

$$|M_{f,0}| = \int_{[0,1]\times[1,\sqrt{3}]} \frac{1}{(x+y^2)^2}\,\mathrm{d}(x,y).$$

Da f stetig ist, können wir den **Satz von Fubini (20.3)** verwenden und sehen, dass

$$\begin{aligned}
|M_{f,0}| &= \int_1^{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{1}{(x+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{3}} [-\frac{1}{x+y^2}]_{x=0}^1\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2} - \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= [-\frac{1}{y} - \arctan(y)]_{y=1}^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan(\sqrt{3}) + 1 + \arctan(1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12},
\end{aligned}$$

wobei wir $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ verwendet haben.

(ii) Es sei $S_n(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leqslant i \leqslant n : x_i \geqslant 0\ , \sum_{i=1}^n \leqslant a\}$ für $0 \leqslant a \leqslant 1$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion (über n), dass $|S_n(a)| = \frac{a^n}{n!}$, womit

$$|S_n| = |S_n(1)| = \frac{1}{n!}$$

folgen würde.
Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $|S_1(a)| = \int_0^a 1 \, \mathrm{d}x = a$.
Induktionsschritt ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Es folgt mit dem **Satz von Fubini (20.3)**

$$\begin{aligned} |S_{n+1}(a)| &= \int_{[0,a]^{n+1}} c_{\{\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leqslant a\}} \, \mathrm{d}x = \int_{[0,a]} \int_{[0,a]^n} c_{\{\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant a - x_{n+1}\}} \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_{n+1} \\ &= \int_{[0,a]} |S_n(a - x_{n+1})| \, \mathrm{d}x_{n+1} \overset{\textbf{(IV)}}{=} \int_0^a \frac{(a - x_{n+1})^n}{n!} \, \mathrm{d}x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 54 (Tutorium)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, \mathrm{d}(x,y)$, $A = [1,2] \times [3,4]$,

(ii) $\int_B y \sin(xy) \, \mathrm{d}(x,y)$, $B = [0,1] \times [0, \pi/2]$,

(iii) $\int_C \frac{x^2 z^3}{1+y^2} \, \mathrm{d}(x,y,z)$, $C = [0,1]^3$,

(iv) $\int_D \sin(x+y+z) \, \mathrm{d}(x,y,z)$, $D = [0,\pi]^3$.

b) Bestimmen Sie das Volumen der folgenden Mengen.

(i) $M_{f,g}$, wobei $f, g : [1,2]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \mathrm{e}^{x+y}$, $g(x,y) := x^2 y$ für alle $(x,y) \in [1,2]^2$,

(ii) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant y\mathrm{e}^{-x} \leqslant b, c \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant d\}$, $0 < a < b < c < d$

(iii) $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geqslant 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant 1\}$.

Hinweis zu (i): Zeigen Sie zunächst, dass $g \leqslant f$ auf $[1,2]^2$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) (i) Da der Integrand stetig ist, können wir den **Satz von Fubini (20.3)** anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = -\int_1^2 \left[\frac{1}{x+y} \right]_{y=3}^{y=4} \mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x+3} \, \mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+4} \, \mathrm{d}x = [\log(x+3)]_{x=1}^{x=2} - [\log(x+4)]_{x=1}^{x=2} \\ &= \log\left(\frac{5}{4}\right) - \log\left(\frac{6}{5}\right) = \log\left(\frac{25}{24}\right) \end{aligned}$$

(ii) Da der Integrand stetig ist, können wir den **Satz von Fubini (20.3)** anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_B y \sin(xy) \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 y \sin(xy) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(xy)]_{x=0}^1 \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(y) \, \mathrm{d}y \\ &= [y - \sin(y)]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

(iii) Da der Integrand stetig ist, können wir den **Satz von Fubini (20.3)** anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_C \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 z^3\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 z^3\,\mathrm{d}z\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = [\frac{z^4}{4}]_{z=0}^1[\arctan y]_{y=0}^1[\frac{x^3}{3}]_{x=0}^1\\ &= \frac{1}{4}\cdot\arctan(1)\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{48}\end{aligned}$$

(iv) Da der Integrand stetig ist, können wir den **Satz von Fubini (20.3)** anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_D \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^\pi\int_0^\pi [-\cos(x+y+z)]_{x=0}^\pi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^\pi\int_0^\pi \cos(y+z)-\cos(\pi+y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= 2\int_0^\pi\int_0^\pi \cos(y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\int_0^\pi [\sin(y+z)]_{y=0}^\pi\,\mathrm{d}z\\ &= 2\int_0^\pi \sin(\pi+z)-\sin(z)\,\mathrm{d}z = -4\int_0^\pi \sin(z)\,\mathrm{d}z = 4[\cos(z)]_{z=0}^\pi = -8\end{aligned}$$

b) (i) Die Funktion f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$, sodass für jedes $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt (Taylorentwicklung dritten Grades)

$$f(x,y) = 1+x+y+\frac{x^2+2xy+y^2}{2}+\frac{1}{6}\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{2} x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}\mathrm{e}^{\chi_1+\chi_2},$$

wobei $(\chi_1,\chi_2)\in S[(0,0),(x,y)]$ und $x_1=x$, $x_2=y$. Dies liegt daran, dass alle partiellen Ableitungen (auch die mehrfachen) von f wieder f entsprechen. Für $(x,y)\in[1,2]^2$ gilt demnach

$$f(x,y)\geqslant\frac{x^2+2xy+y^2}{2}\geqslant 2xy\geqslant x^2y = g(x,y)$$

wegen $(x-y)^2\geqslant 0$, also $x^2+y^2\geqslant 2xy$. Somit ist $M_{f,g}$ korrekt definiert. Da f und g stetig sind, gilt mit dem **Satz von Fubini**, dass

$$\begin{aligned}|M_{f,g}| &= \int_1^2\int_1^2 \mathrm{e}^{x+y}-x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 [\mathrm{e}^{x+y}-\frac{x^2y^2}{2}]_{y=1}^2\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{e}^{x+2}-\mathrm{e}^{x+1}-\frac{3x^2}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= [\mathrm{e}^{x+2}-\mathrm{e}^{x+1}-\frac{x^3}{2}]_{x=1}^2 = (\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^3-4)-(\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^3+\mathrm{e}^2-\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

(ii) Prinzipiell gilt $c\leqslant y\leqslant d$. Zusätzlich gelten die Restriktionen

$$y\leqslant\mathrm{e}^x\leqslant d\Leftrightarrow\log(y)\leqslant x\leqslant\log(d)$$

und

$$a\leqslant y\mathrm{e}^{-x}\leqslant b\Leftrightarrow\log(y)-\log(b)\leqslant x\leqslant\log(y)-\log(a).$$

1. Fall: $a > 1$. Dann gilt $\log(a) > 0$ und die Restriktionen liefern

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \log(y) - \log(a) < \log(y),$$

ein Widerspruch. Somit gilt hier $A = \emptyset$ und $|A| = 0$.
2. Fall: $a \leqslant 1$, $b > 1$. Dann gilt $\log(a) \leqslant 0$ und $\log(b) > 0$.
(1) $\frac{c}{a} \geqslant d$. Die Kombination der Restriktionen liefert

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \log(d)$$

und der **Satz von Fubini** sowie $A \subseteq [\log(c), \log(d)] \times [c, d]$

$$\begin{aligned}
|A| &= \int_{[\log(c),\log(d)]\times[c,d]} c_{\{\log(y)\leqslant x\}}\, \mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \int_{\log(c)}^{\log(d)} c_{\{\log(y)\leqslant x\}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_c^d (\log(d) - \log(y))\, \mathrm{d}y = [y\log(d) - y(\log(y) - 1)]_{y=c}^d \\
&= d + c(\log(\frac{c}{d}) - 1).
\end{aligned}$$

(2) $\frac{c}{a} < d$. Die Kombination der Restriktionen liefert

$$\log(y) \leqslant x \leqslant \begin{cases} \log(y) - \log(a) & , y \leqslant da, \\ \log(d) & , y > da. \end{cases}$$

Der **Satz von Fubini** sowie **Satz 20.5** und $A \subseteq [\log(c), \log(d)] \times [c, d]$ liefern

$$\begin{aligned}
|A| &= \int_{[\log(c),\log(d)]\times[c,d]} c_{\{\log(y)\leqslant x\leqslant\log(y)-\log(a), y\leqslant da\}\cup\{\log(y)\leqslant x\leqslant\log(d), y>da\}}\, \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{[\log(c),\log(d)]\times[c,d]} c_{\{\log(y)\leqslant x\leqslant\log(y)-\log(a), y\leqslant da\}}\, \mathrm{d}(x,y) \\
&+ \int_{[\log(c),\log(d)]\times[c,d]} c_{\{\log(y)\leqslant x\leqslant\log(d), y>da\}}\, \mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{\textbf{53 b)}}{=} \int_{[\log(c),\log(d)]\times[c,d]} c_{\{\log(y)\leqslant x\leqslant\log(y)-\log(a)\}} c_{\{y\leqslant da\}}\, \mathrm{d}(x,y) \\
&+ \int_{[\log(c),\log(d)]\times[c,d]} c_{\{\log(y)\leqslant x\leqslant\log(d)\}} c_{\{y>da\}}\, \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_c^{da} \int_{\log(y)}^{\log(y)-\log(a)} 1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_{da}^d \int_{\log(y)}^{\log(d)} 1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&\overset{\text{2. Int s.o. (da statt d)}}{=} -\int_c^{da} \log(a)\, \mathrm{d}y + d + da(\log(a) - 1) = d(1-a) + c\log(a).
\end{aligned}$$

3. Fall: $b \leqslant 1$. Wieder gibt es die beiden Unterteilungen wie im 2. Fall, in beiden ändert sich lediglich die Untergrenze für x zu $\log(y) - \log(b)$. Es ergibt sich somit
(1) $\frac{c}{a} \geqslant d$.

$$|A| = d + c(\log(\frac{c}{d}) - 1) + (d - c)\log(b).$$

(2) $\frac{c}{a} < d$.

$$|A| = d(1-a) + c\log(a) + (d-c)\log(b).$$

(iii) Zunächst einmal gilt

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x,y,z \geqslant 0, \sqrt{x} \leqslant 1-\sqrt{z}-\sqrt{y}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y,z \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant (1-\sqrt{z}-\sqrt{y})^2\}.$$

Dies sei dem Leser als leichte Übung überlassen. Dann folgt mit **Aufgabe 53 b)** sowie dem **Satz von Fubini** und $B \subseteq [0,1]^3$

$$\begin{aligned}
|B| &= \int_{[0,1]^3} c_B \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{[0,1]^3} c_{\{x \leqslant (1-\sqrt{z}-\sqrt{y})^2\}} \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{[0,1]^2} \int_0^{(1-\sqrt{z}-\sqrt{y})^2} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}(y,z) \\
&= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1-\sqrt{z}-\sqrt{y})^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1-\sqrt{z})^2 - 2(1-\sqrt{z})\sqrt{y} + y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 [(1-\sqrt{z})^2 y - \frac{4}{3}(1-\sqrt{z}) y^{3/2} + \frac{y^2}{2}]_{y=0}^{(1-\sqrt{z})^2} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-\sqrt{z})^4 \,\mathrm{d}z \overset{s=1-\sqrt{z}}{=} -\frac{1}{3}\int_0^1 s^4(s-1)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{3}[\frac{s^6}{6} - \frac{s^5}{5}]_{s=0}^1 = \frac{1}{90}
\end{aligned}$$