Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
01.07.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 55 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_A y^2 \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \le y^2 + z^2 \le |x|\right\}$,

b) $\int_B xyz \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\, x^2 + y^2 \le 1\right\}$,

c) $\int_0^1 \int_y^1 \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

Lösungsvorschlag

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \le |x| \Leftrightarrow |x| \le 1$. Deshalb folgt mit dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\int_A y^2 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{-1}^1 \int_{A_x} y^2 \,\mathrm{d}(y,z) \,\mathrm{d}x$$

mit

$$A_x = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y^2 + z^2 \le |x|\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für y, z liefert

$$\int_{A_x} y^2 \,\mathrm{d}yz = \int_0^{2\pi} \int_{|x|}^{\sqrt{|x|}} r^2 \sin^2(\varphi) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \pi \frac{1}{4} \left[r^4\right]_{r=|x|}^{r=\sqrt{|x|}} = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - x^4\right)$$

für alle $x \in [-1,1]$. Da nun im Integranden nur gerade Potenzen von x vorkommen, folgt:

$$\int_A y^2 \,\mathrm{d}(x,y,z) = 2\int_0^1 \frac{\pi}{4}\left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{15}$$

b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_B xyz \,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\cos(\varphi) r \sin(\varphi) z r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 z \,\mathrm{d}z \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\sin(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot \frac{1}{4} = 0\end{aligned}$$

c) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^1 \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{x^2} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, 0 \le y \le x \le 1\}}(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \int_0^x \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\mathrm{e}-1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 56 (Tutorium)

a) Lösen Sie **Aufgabe 54 b) (iii)** mithilfe des Prinzips von Cavalieri.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale. Ändern Sie bei **(iii)** zunächst die Integrationsreihenfolge.

(i) $\int_A x^2yz \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le y \le x,\, x^2+y^2 \le 1,\, 0 \le z \le 2\right\}$,

(ii) $\int_B z(x^3+xy^2)\,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le \pi,\, 1 \le x^2+y^2 \le 4,\, |\frac{y}{x}| \le 1\right\}$,

(iii) $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Lösungsvorschlag

a) Gilt $(x,y,z) \in B$, so folgt $z \in [0,1]$. Für ein festes solches z gilt

$$Q(z) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in B\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geqslant 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant 1-\sqrt{z}\}.$$

Somit folgt $y \in [0,(1-\sqrt{z})^2]$. Für ein festes solches y gilt

$$\tilde{Q}(z,y) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0,\ \sqrt{x} \leqslant 1-\sqrt{z}-\sqrt{y}\} = [0,(1-\sqrt{z}-\sqrt{y})^2].$$

Wenden wir also das Prinzip von Cavalieri zwei Mal an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
|B| &= \int_0^1 |Q(z)|\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} |\tilde{Q}(z,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1-\sqrt{z}-\sqrt{y})^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{z})^2} (1-\sqrt{z})^2 - 2(1-\sqrt{z})\sqrt{y} + y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 [(1-\sqrt{z})^2y - \frac{4}{3}(1-\sqrt{z})y^{3/2} + \frac{y^2}{2}]_{y=0}^{(1-\sqrt{z})^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-\sqrt{z})^4\,\mathrm{d}z \overset{s=1-\sqrt{z}}{=} -\frac{1}{3}\int_0^1 s^4(s-1)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{3}[\frac{s^6}{6}-\frac{s^5}{5}]_{s=0}^1 = \frac{1}{90}
\end{aligned}$$

b) a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3)

$$\int_A x^2yz\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^2 z\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[z^2\right]_{z=0}^{z=2}\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) = 2\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y)$$

mit

$$A' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x,\, x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Einführen von Polarkoordinaten für x,y liefert:

$$\begin{aligned}
\int_{A'} x^2y\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^2\cos^2(\varphi)r\sin(\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\cos^3(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\int_A x^2yz\,\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{2}{15}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_B z(x^3+xy^2)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^\pi z\int_1^2 r^3\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{31}{5}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=0
\end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}
C &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\, y\le x\le y^2+1\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ((0\le x\le 1)\vee(1<x\leqslant 2))\wedge(0\le y\le 1)\wedge(y\le x\le y^2+1)\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ((0\le y\le x\le 1)\vee((1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1))\right\}\\
&= \underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x\le 1\right\}}_{=C_1}\cup\underbrace{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (1<x\le 2)\wedge(\sqrt{x-1}<y\le 1)\right\}}_{=C_2}
\end{aligned}$$

Ferner ist $C_1\cap C_2=\emptyset$. Es folgt mit dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_C x^2y\,\mathrm{d}(x,y)=\int_{C_1}x^2y\,\mathrm{d}(x,y)+\int_{C_2}x^2y\,\mathrm{d}(x,y)\\
&= \int_0^1\int_0^x x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_1^2\int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^4}{2}\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\frac{1-(x-1)}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{10}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right]_{x=1}^{x=2}=\frac{1}{10}+\frac{8}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-2=\frac{67}{120}
\end{aligned}$$

Alternativ lässt sich das Integral auch direkt berechnen, ohne die Integrationsreihenfolge umzudrehen.

Aufgabe 57 (Übung)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \sin(z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\ge 0,\ x+y+2z\le 1\right\}$,

b) Sei $B:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\|\leqslant 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & ,0\leqslant\|(x,y,z)\|\leqslant 1,\\ 2 & ,1<\|(x,y,z)\|\leqslant 2.\end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\int_B \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach dem Satz von Fubini (Satz 20.3):

$$\begin{aligned}
\int_A \sin(z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\frac{1-x-y}{2}} \sin(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\int_0^1\int_0^{1-x} [\cos(z)]_{z=0}^{z=\frac{1-x-y}{2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} 1-\cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)+2\left[\sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)-2\sin\left(\frac{1-x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-4\left[\cos\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{7}{2}+4\cos\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

b) Definiere $K := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ und $S := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 2\}$. Dann gilt $B = K\cup S$ und $K\cap S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Anhand von Kugelkoordinaten sieht man sofort, dass

$$\int_{K\cap S} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = 0,$$

womit nach Satz 20.5 folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_B \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) + \int_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{1+r^2}\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r + \int_1^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} 2r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\
&= 4\pi\int_0^1 1-\frac{1}{1+r^2}\,\mathrm{d}r + \frac{56}{3}\pi = 4\pi[r-\arctan(r)]_{r=0}^1 + \frac{56}{3}\pi \\
&= 4\pi-\pi^2+\frac{56}{3}\pi = \frac{68}{3}\pi-\pi^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 58 (Tutorium)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7}\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

wobei $A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le 1,\, x^2+y^2 \le (1-z)^2\right\}$,

b) Bestimmen Sie für $a,b,c>0$ das Volumen des Ellipsoids

$$E := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\}.$$

Lösungsvorschlag

a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_A (x^2+y^2)^2 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-z} r^4 \mathrm{e}^{2(1-z)^7} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}\left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{r=1-z}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{2(1-z)^7}(1-z)^6\,\mathrm{d}z\\ &\overset{x=1-z}{=} \frac{\pi}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x^7}x^6\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{14}\cdot\left[\mathrm{e}^{2x^7}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{42}(\mathrm{e}^2-1)\end{aligned}$$

b) Wir benutzen die Substitutionsregel mit der Funktion

$$g(u,v,w) = (au,bv,cw) \qquad \forall (u,v,w)\in\mathbb{R}^3.$$

Diese Funktion ist offensichtlich injektiv und stetig differenzierbar mit

$$g'(u,v,w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix},$$

also $\det g'(u,v,w) = abc > 0$. Mit $K := \{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2 \leqslant 1\}$ gilt $g(K) = E$, denn

$$(u,v,w)\in K \Leftrightarrow \left(\frac{au}{u}\right)^2 + \left(\frac{bv}{v}\right)^2 + \left(\frac{cw}{w}\right)^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow (au,bv,cw) = g(u,v,w)\in E.$$

Daher liefert die Substitutionsregel

$$|E| = \int_E 1\,\mathrm{d}(x,y,z) = abc\int_K 1\,\mathrm{d}(x,y,z) = abc|K|.$$

Das Volumen von K erhalten wir über die Verwendung von Kugelkoordinaten.

$$|K| = \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3},$$

womit $|E| = \frac{4\pi}{3}abc$ folgt.

Aufgabe 59 (Übung)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \mathrm{e}^{\frac{x+y}{x-y}}\,\mathrm{d}(x,y),$$

wobei $A\subseteq\mathbb{R}^2$ das Trapez mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ und $(0,-1)$ ist.

Lösungsvorschlag

Wir definieren $g(u,v) = (\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v))$, da mit $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{x-y}}$ dann $f(g(u,v)) = \mathrm{e}^{\frac{u}{v}}$. Ist

$$B := \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant v\leqslant 2, -v\leqslant u\leqslant v\},$$

so gilt wegen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \leqslant 0, x-y \in [1,2]\},$$

dass $g(B) = A$. Ist $(u,v) \in B$, so folgt $u+v \geqslant -v+v = 0$ und $u-v \leqslant v-v = 0$ sowie $\frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v) = v \in [1,2]$, also $g(u,v) \in A$. Ist $(x,y) \in A$, so gilt $(x+y, x-y) \in B$ und $g(x+y,x-y) = (x,y)$. Außerdem ist g injektiv, denn aus $(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)) = (\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v}), \frac{1}{2}(\tilde{u}-\tilde{v}))$ folgt durch addieren bzw. subtrahieren der beiden Gleichungen sofort $u = \tilde{u}$ und $v = \tilde{v}$. Die Substitutionsregel liefert wegen

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

also $\det g'(u,v) = -\frac{1}{2}$, dass

$$\begin{aligned} \int_A \mathrm{e}^{\frac{x+y}{x-y}} \,\mathrm{d}(x,y) &= \frac{1}{2} \int_B \mathrm{e}^{\frac{u}{v}} \,\mathrm{d}(u,v) = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^{v} \mathrm{e}^{\frac{u}{v}} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int_1^2 [v\mathrm{e}^{\frac{u}{v}}]_{u=-v}^{v} \,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 v(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}) \,\mathrm{d}v = \frac{3}{4}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}). \end{aligned}$$

Aufgabe 60 (Tutorium)

Es bezeichne $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aller $(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-4x}$ für $x \geqslant 0$ bzw. $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4+4x}$ für $x < 0$.

a) Sei $B = [0,1]^2$ und $g : Q \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Zeigen Sie, dass $g(B) = A$.

b) Berechnen Sie mit das Integral $\int_A y d(x,y)$.

Lösungsvorschlag

a) Indem man die Gleichungen $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-4x}$ und $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4+4x}$ nach x auflöst, sieht man, dass A von den Parabeln $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ und $x = \frac{y^2}{4} - 1$ (für $0 \leqslant 2 \leqslant y$ sowie dem Segment von $(-1,0)$ nach $(1,0)$ berandet wird.

Ist $(u,v) \in B$, so gilt $2uv \in [0,2]$ sowie $1 - \frac{(2uv)^2}{4} = 1 - u^2v^2 \geqslant |u^2 - v^2|$ (für $u \geqslant v$ wegen $(1+v^2)(1-u^2) \geqslant 0$, für $u < v$ wegen $(1-v^2)(1+u^2) \geqslant 0$). Deshalb gilt $g(u,v) \in A$. Ist $(x,y) \in A$ mit $y \neq 0$, so gilt

$$\Big(\frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2} - x)}}, \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2}}\Big) \in B.$$

Dass beide Komponenten positiv sind, ist klar. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2} - x)}} \leqslant 1 &\Leftrightarrow y^2 + 2x \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} \\ &\Leftarrow y^2 \leqslant 4 - 4x, \end{aligned}$$

was erfüllt ist. Schließlich gilt ebenso

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2}} \leqslant 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2 + x \\ &\Leftarrow y^2 \leqslant 4 + 4x, \end{aligned}$$

was ebenfalls erfüllt ist. Wegen $g(\frac{y}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2}-x)}}, \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}) = (x,y)$ haben wir ein Urbild von (x,y) in B gefunden. Für $(x,y) \in A$ mit $y = 0$ ist das gesuchte Urbild entweder $(\sqrt{x}, 0)$ (für $x \geqslant 0$) oder $(0, \sqrt{-x})$ (für $x < 0$), die beide ebenfalls wieder in B liegen.
Da man beim Finden des Urbildes oben bemerkt, dass die gegebenen Kandidaten die einzig möglichen sind, ist die Injektivität von g ebenfalls gezeigt.

b) Wir berechnen

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix},$$

womit $\det g'(u,v) = 4(u^2+v^2) > 0$ für alle $(u,v) \in B \setminus \{(0,0)\}$. Die Substitutionsregel liefert nun

$$\begin{aligned} \int_A y \; \mathrm{d}(x,y) &= \int_B 2uv \cdot 4(u^2+v^2) \; \mathrm{d}(u,v) = 8 \int_0^1 \int_0^1 u^3 v + uv^3 \; \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v \\ &= 8 \int_0^1 [\frac{u^4 v}{4} + \frac{u^2 v^3}{2}]_{u=0}^1 \; \mathrm{d}v = \int_0^1 2v + 4v^3 \; \mathrm{d}v = [v^2 + v^4]_{v=0}^1 = 2 \end{aligned}$$