Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
08.07.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 61 (Übung)

Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationstorus'

$$\mathbb{T}_r^R = \{((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi), (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi), r\sin(\vartheta)) : \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi]\}.$$

Lösungsvorschlag

Betrachte die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$g(\varphi, \vartheta) = ((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi), (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi), r\sin(\vartheta))$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Wir zeigen: g ist injektiv auf $[0, 2\pi)^2$: Seien dazu $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi)$ mit $g(\varphi_1, \vartheta_1) = g(\varphi_2, \vartheta_2)$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \ni (g_1(\varphi_1, \vartheta_1), g_2(\varphi_1, \vartheta_1)) &= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_1))}_{>0}(\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1)) \\ &= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_2))}_{>0}(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2)) = (g_1(\varphi_2, \vartheta_2), g_2(\varphi_2, \vartheta_2)) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Wegen der Bijektivität der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ und $(R+r\cos(\vartheta_2)) = (R+r\cos(\vartheta_2))$. Zusammen mit $g_3(\varphi_1, \vartheta_1) = g_3(\varphi_2, \vartheta_2)$, folgt weiter

$$\begin{aligned} r\cos(\vartheta_1) &= r\cos(\vartheta_2), \\ r\sin(\vartheta_1) &= r\sin(\vartheta_2). \end{aligned}$$

Wieder folgt mit der Bijektivitat der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dass $\vartheta_1 = \vartheta_2$ gilt. Damit hat sich g als injektiv auf $[0, 2\pi)^2$ erwiesen.
Es gilt

$$g'(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \|\partial_\varphi g(\varphi, \vartheta) \times \partial_\vartheta g(\varphi, \vartheta)\| &= \|(r\cos(\varphi)\cos(\vartheta)(R + r\cos(\vartheta)), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta)(R + r\cos(\vartheta)), r\sin(\vartheta)(R + r\cos(\vartheta)))\| \\ &= r(R + r\cos(\vartheta)) > 0 \end{aligned}$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ und damit ist $\mathrm{rg}(g'(\varphi, \vartheta)) = 2$ für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ (ansonsten wären die beiden Spalten an einem Punkt linear abhängig und das Kreuzprodukt der Nullvektor, was nachweislich nicht der

Fall ist). Definiert man $B = [0, 2\pi]^2$, so gilt nach Vorlesung

$$\begin{aligned} A(\mathbb{T}_r^R) &= \int_B \|\partial_\varphi g(\varphi,\vartheta) \times \partial_\vartheta g(\varphi,\vartheta)\| \,\mathrm{d}(\varphi,\vartheta) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos(\vartheta))\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos(\vartheta))\,\mathrm{d}\vartheta = 4\pi^2 rR. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen an die Definition der Vorlesung sind hier nicht komplett erfüllt, es gilt hier jedoch die analoge Alternative wie bei der Substitutionsregel, was die Integrationsmenge und die Menge, auf der die Abbildung g injektiv sein muss, angeht.
Die Menge, die man durch das Integral über das kompakte Intervall B zu viel erhält, ist $g([0,2\pi] \times \{2\pi\}) \cup g(\{2\pi\} \times [0, 2\pi])$. Die ensprechenden Oberflächen sind jedoch 0, was man erkennt, wenn man analog zu oben die Definition anwendet.

Aufgabe 62 (Tutorium)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$\mathcal{F} = \{(x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 \leqslant \frac{r^2}{4}\}$$

b) Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial D} f(x,y) \cdot \,\mathrm{d}(x,y)$$

(i) direkt und

(ii) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Lösungsvorschlag

a) Die gesuchte Fläche wird durch die Funktion $g : U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{r}{2})^2 + y^2 \leqslant \frac{r^2}{4}\} \to \mathbb{R}^3$,

$$g(x,y) = (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$$

parametrisiert. Nach Vorlesung gilt mit $f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

$$A(\mathcal{F}_0) = \int_{\mathcal{F}_0} \mathrm{d}\sigma = \int_U \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_U \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Durch Nutzung der normalen Polarkoordinaten F bzgl. des Ursprungs ergibt sich anhand einer Skizze, dass $F(A) = U$ genau für die Menge

$$A := \{(s,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant s \leqslant r\cos(\varphi)\}$$

gilt. Mit dem Satz von Fubini gilt dann

$$
\begin{aligned}
A(\mathcal{F}_0) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r\cos(\varphi)} \frac{rs}{\sqrt{r^2-s^2}} \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-r\sqrt{r^2-s^2}]_{s=0}^{r\cos(\varphi)} \,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 - r^2\,|\sin(\varphi)| \,\mathrm{d}\varphi \\
&= r^2\pi - 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = r^2\pi - 2r^2[-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = r^2(\pi-2).
\end{aligned}
$$

b) D ist ein kompakter Normalbereich. Seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma_1(t) = (0,t), \quad \gamma_2(t) = (1-t,t), \quad \gamma_3(t) = (0,1-t)$$

für alle $t \in [0,1]$. Dann ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ doppelpunktfrei und geschlossen. Die Spur von γ ist gerade ∂D. Dabei liegt D immer „links von γ“.

(i) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D} f \cdot \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1{}'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2{}'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3{}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 [(t^2)] + [-((1-t)^2 + (1-t)t) + ((1-t)^2 t - t^2)] + [(1-t)^2]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 -(1-t)t + (1-t)^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)t(1-t-1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^3 - t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

(ii) Es gilt nach dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ (Satz 21.1):

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D} f \cdot \mathrm{d}(x,y) &= \int_D \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy - x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x(1-x)^2 - x(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x)(1-x-1)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^3 - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 63 (Übung)

Es sei Γ eine positiv orientierte Parameterisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ mit der Ebene $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\right\}$ entsteht. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_\Gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \, \mathrm{d}(x,y,z)$$

a) direkt und

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Lösungsvorschlag

a) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ von $Z \cap E$ ist durch

$$\Gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Entsprechend ist

$$\Gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Damit gilt für das gesuchte Integral:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3(\varphi), \cos^3(\varphi), -(1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi))^3) \cdot \\
&\quad (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), \sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi) - (\sin(\varphi) - \cos(\varphi))(1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi))^3 \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sin^4(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi - \frac{1}{4}\left[(1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi))^4\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt das Integral auswerten, z.B. mit Hilfe der rekursiven Formel aus HM1, Aufgabe 57a).

b) Eine reguläre Parameterisierung $g : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ der Fläche $M = E \cap \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ist durch

$$g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1 - r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $r \in [0,1]$ und alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Wir berechnen

$$\left(\partial_r g \times \partial_\varphi g\right)(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(r,\varphi)\in(0,1)\times(0,2\pi)$. Als letzte Vorbereitung berechnen wir

$$\nabla\times\begin{pmatrix}-y^3\\x^3\\-z^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3x^2+3y^2\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Es folgt mit dem Satz von Stokes (vgl. 21.3):

$$\int_\Gamma(-y^3,x^3,-z^3)\cdot\,\mathrm{d}(x,y,z)=\int_M\nabla\times\begin{pmatrix}-y^3\\x^3\\-z^3\end{pmatrix}\cdot\,\mathrm{d}o=3\int_0^1\int_0^{2\pi}r^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi$$

Aufgabe 64 (Tutorium)

Es sei $\mathcal{F}_0=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\,x^2+y^2+z^2=1,\,z>0\right\}$ und $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z)=(1,xz,xy)$$

für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}_0}f\cdot\,\mathrm{d}o$$

a) direkt und

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Lösungsvorschlag

a) Eine reguläre Parameterisierung $g:(0,2\pi)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}^3$ (bis auf $N=\{(0,0,1)\}$) der Fläche $\mathcal{F}_0$ ist durch

$$g(\varphi,\vartheta)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cos(\vartheta)\\\sin(\varphi)\cos(\vartheta)\\\sin(\vartheta)\end{pmatrix}$$

für alle $\varphi\in(0,2\pi)$ und alle $\vartheta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ gegeben. Wir berechnen vorbereitend

$$\left(\partial_\varphi g\times\partial_\vartheta g\right)(\varphi,\vartheta)\quad=\quad\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\cos(\vartheta)\\\cos(\varphi)\cos(\vartheta)\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\\-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)\\\cos(\vartheta))\end{pmatrix}=\cos(\vartheta)g(\varphi,\vartheta)$$

für alle $(\varphi,\vartheta)\in(0,2\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})$. Es gilt mit der Definition des Oberflächenintegrals

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_0}f\cdot\,\mathrm{d}o&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}1\\\cos(\varphi)\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\\\cos(\varphi)\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\cos(\vartheta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\cos(\vartheta)\\\sin(\varphi)\cos(\vartheta)\\\sin(\vartheta)\end{pmatrix}\cos(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\cos^2(\vartheta)\cos(\varphi)+2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos^3(\vartheta)\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\vartheta)\left[-\sin(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}+\cos^3(\vartheta)\sin(\vartheta)\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\,\mathrm{d}\vartheta=0\end{aligned}$$

b) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ des Randes $\partial\mathcal{F}_0$ ist durch

$$\Gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Laut Vorlesung würde man eigentlich $g \circ \gamma$ betrachten, wobei γ den Rand von $(0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$ parametrisiert. Dabei ergibt sich jedoch genau obiges plus eine Linie von $(1, 0)$ zum Nordpol, die jedoch ein Mal hin und wieder zurück durchlaufen wird, sodass sich die Integrale aufheben. Es gilt

$$\Gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ferner liefert scharfes Hinsehen, dass für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = (\frac{xz^2}{2}, \frac{x^2 y}{2}, y)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\nabla \times F = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt. Es folgt mit dem Satz von Stokes (21.3):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}_0} f(x) \cdot \,\mathrm{d}o &= \int_{\mathcal{F}_0} (\nabla \times F(x)) \cdot \,\mathrm{d}o \\
&= \int_{\Gamma} F(x) \cdot \,\mathrm{d}(x, y, z) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)}{2}, \sin(\varphi)\right) \cdot (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)}{2} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{1}{8}\left[\cos^4(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 65 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, das Erfüllen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, relle bzw. komplexe Differenzierbarkeit sowie Holomorphie. Geben Sie, dort wo sie existiert, die Ableitung f' an.

(i) $f(z) = z \operatorname{Re} z$,

(ii) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf $\mathbb{C}$, so ist f konstant auf $\mathbb{C}$.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass aus $(\operatorname{Re} f)' \equiv 0$ bzw. $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$ folgt, dass $\operatorname{Re} f$ bzw. $\operatorname{Im} f$ konstant auf $\mathbb{C}$ ist.

Lösungsvorschlag

a) (i) Hier gilt $f(x + \mathrm{i}y) = (x + \mathrm{i}y)x = x^2 + \mathrm{i}xy$. Offenbar sind

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = x^2 \qquad \text{und} \qquad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = xy$$

stetige Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, womit f stetig auf $\mathbb{C}$ ist. Zudem sind beide Funktionen überall stetig partiell differenzierbar, also ist $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ überall reell differenzierbar. Wegen

$$u_x(x,y) = 2x, \quad v_y(x,y) = x \qquad \text{und} \qquad u_y(x,y) = 0, \quad -v_x(x,y) = -y$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ sind die CRD nur für $x = y = 0$ erfüllt, also ist $z = 0$ der einzige Punkt, in dem f komplex differenzierbar ist. f ist jedoch nirgends holomorph. Es gilt

$$f'(0) = u_x(0,0) + \mathrm{i} v_x(0,0) = 0.$$

(ii) Hier gilt

$$f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

für $x + \mathrm{i}y \neq 0$. Offenbar sind

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{und} \qquad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

stetige Funktionen von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}$, womit f stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Da außerdem

$$|f(z) - f(0)| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \to 0 \qquad \text{für } z \to 0,$$

ist f auch stetig im Ursprung und somit stetig auf ganz $\mathbb{C}$. Zudem sind beide Funktionen u und v stetig partiell differenzierbar außerhalb des Ursprungs, also ist $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^2$ reell differenzierbar. Im Ursprung ist dies nicht der Fall, denn dort wäre z.B. die partielle Ableitung von u nach x gegeben durch den Grenzwert von

$$\frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \frac{x}{|x|},$$

für $x \to 0$, welcher jedoch nicht existiert. Die partiellen Ableitungen außerhalb des Ursprungs sind gegeben durch

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \frac{x^3 + 3xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & u_y(x,y) &= -\frac{y^3 + 3x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ v_x(x,y) &= \frac{2y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & v_y(x,y) &= \frac{2x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Damit die CRD erfüllt sind, müsste demnach $x^3 + 3xy^2 = 2x^3$ und $y^3 + 3x^2 y = 2y^3$ gelten, also $x(3y^2 - x^2) = 0 = y(3x^2 - y^2)$. Die Möglichkeiten $x = 0$ oder $y = 0$ kommen nicht in Frage, da ansonsten $z = 0$ folgt. Also muss $3y^2 = x^2$ und $3x^2 = y^2$ erfüllt sein. Insbesondere folgt $x^2 = 9x^2$, also $x = 0$, was uns wieder $z = 0$ liefert. Also sind die CRD außerhalb des Ursprungs nicht erfüllt, womit f nirgends komplex differenzierbar oder gar holomorph ist.

b) Wir verwenden die Darstellung $f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ mit $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Da f auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, gelten dort die CRD $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

(i) Ist $\operatorname{Re} f = u$ konstant, so gilt $u_x = 0 = u_y$. Nach den CRD gilt nun auch $v_y = 0 = -v_x = v_x$, also auch $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$. Damit ist v und folglich auch f konstant. Analoge Argumentation liefert die Behauptung für konstantes v.

(ii) Ist $|f(z)| = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, womit die Konstanz bewiesen ist. Sei also $|f(z)| = c > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies bedeutet $u^2 + v^2 = c^2$. Partielles Ableiten liefert

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2uu_y + 2vv_y = 0.$$

Wir benutzen die CRD, um daraus zu folgern, dass

$$uv_y + vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad -uv_x + vv_y = 0.$$

Addieren wir das i-fache der zweiten Gleichung zur ersten Gleichung, so erhalten wir

$$uv_y + vv_x - \mathrm{i}uv_x + \mathrm{i}vv_y = 0,$$

und somit $u(v_y - \mathrm{i}v_x) + v(v_x + \mathrm{i}v_y) = 0$, also $(u + \mathrm{i}v)(v_y - \mathrm{i}v_x) = 0$. Da $f(z) \neq 0$ auf $\mathbb{C}$ folgt $u + \mathrm{i}v \neq 0$ und somit

$$v_y - \mathrm{i}v_x = 0,$$

was $v_x = v_y = 0$ ergibt. Somit gilt wieder $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$, also v konstant auf $\mathbb{C}$ und die Behauptung folgt mit (i).

Aufgabe 66 (Tutorium)

a) Sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $(\operatorname{Im} f)(z) = \cos(x)\sinh(y)$ für $z = x + \mathrm{i}y$ und $f(0) = 0$. Bestimmen Sie $\operatorname{Re} f$. Betrachten Sie die Funktionswerte von f auf der reellen Achse, um eine Vermutung über den Ursprung dieser Funktion anzustellen.

b) Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

(i) $\int_\gamma z \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, wobei γ der Weg von 0 nach $1 + \mathrm{i}$ auf der Parabel $\{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$ ist,

(ii) $\int_\gamma |z|^2 \, \mathrm{d}z$, wobei γ den Rand des Dreiecks mit Eckpunkten 0,1 und i ein Mal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft,

(iii) $\int_\gamma \overline{z}^2 \, \mathrm{d}z$, wobei $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\sin(t)$ für $t \in [0, T]$ mit $T > 0$ so, dass $\mathrm{L}(\gamma) = \pi/2$.

Lösungsvorschlag

a) Damit die Funktion f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, muss sie in allen Punkten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Schreiben wir $f = u + \mathrm{i}v$, so muss also gelten, dass

$$u_x(x,y) \stackrel{!}{=} \cos(x)\cosh(y) = v_y(x,y),$$

also $u(x,y) = \sin(x)\cosh(y) + g(y)$ für eine differenzierbare Funktion g. Andererseits muss

$$u_y(x,y) \stackrel{!}{=} \sin(x)\sinh(y) = -v_x(x,y)$$

erfüllt sein, womit sich $u(x,y) = \sin(x)\cosh(y) + h(x)$ mit einer differenzierbaren Funktion h ergibt. Kombiniert erhalten wir $v(x,y) = \cos(x)\sinh(y) + c$ für eine komplexe Konstante c, die wegen $f(0) = 0$ jedoch identisch Null ist. Somit gilt

$$(\operatorname{Re} f)(z) = \sin(x)\cosh(y), \qquad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}.$$

Betrachten wir die Funktionswerte von f auf der reellen Achse, so sehen wir $f(x) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies könnte die Vermutung nahelegen, dass es sich bei f um die komplexe Sinusfunktion handelt, was tatsächlich der Fall ist. Zudem können wir zeigen, dass f die einzige auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist, die auf der rellen Achse mit der Sinusfunktion übereinstimmt.

b) (i) Wir parametrisieren den Weg durch

$$\gamma(t) = t + \mathrm{i}t^2$$

für $t \in [0,1]$. Dann gilt $\gamma'(t) = 1 + \mathrm{i}2t$ und aus der Definition des Wegintegrals folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma z \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \gamma(t) \operatorname{Re}(\gamma(t))\gamma'(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 (t^2 + \mathrm{i}t^3)(1+\mathrm{i}2t)\, \mathrm{d}t \\ = \int_0^1 (t^2 - 2t^4) + \mathrm{i}3t^3 \, \mathrm{d}t = [\frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5]_{t=0}^1 + \mathrm{i}[\frac{3}{4}t^4]_{t=0}^1 = -\frac{1}{15} + \mathrm{i}\frac{3}{4}\end{aligned}$$

(ii) Wir nutzen die Parametrisierungen

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= t \\ \gamma_2(t) &= 1 + t(\mathrm{i}-1) = (1-t) + \mathrm{i}t \\ \gamma_3(t) &= \mathrm{i} - \mathrm{i}t = \mathrm{i}(1-t)\end{aligned}$$

für die Seiten des Dreiecks. Dabei gilt jeweils $t \in [0,1]$. Zudem gilt $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$ und das gesuchte Integral ist die Summe der drei Integrale entlang der Wege γ_i, $i = 1,\ldots,3$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma |z|^2 \, \mathrm{d}z &= \int_0^1 |\gamma_1(t)|^2\gamma_1'(t) + |\gamma_2(t)|^2\gamma_2'(t) + |\gamma_3(t)|^2\gamma_3'(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^2 + ((1-t)^2 + t^2)(\mathrm{i}-1) - (1-t)^2\mathrm{i}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 -(1-2t+t^2) + \mathrm{i}t^2 \, \mathrm{d}t = -[t - t^2 + \frac{1}{3}t^3]_{t=0}^1 + \mathrm{i}[\frac{1}{3}t^3]_{t=0}^1 = \frac{1}{3}(-1+\mathrm{i}).\end{aligned}$$

(iii) Wir berechnen zuerst die Länge des Weges. Es gilt

$$\gamma'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\sin(t) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\cos(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$$

und deshalb

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_0^T |\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}|\, \mathrm{d}t = T.$$

Daher müssen wir $T = \pi/2$ wählen und erhalten für das Integral den Wert

$$\int_\gamma \overline{z}^2 \, \mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\sin^2(t)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\, \mathrm{d}t.$$

Mit Hilfe von partieller Integration erhalten wir

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\, \mathrm{d}t = [\sin(t)\cos(t)]_{t=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, \mathrm{d}t,$$

sodass sich wegen $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

$$\int_\gamma \overline{z}^2\, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}$$

ergibt.