

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

12. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 67 (ÜBUNG)

a) Beweisen Sie das **LEMMA VON JORDAN**: Ist f stetig auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0\}$ für ein $R_0 > 0$ sowie entweder

(i) $\alpha > 0$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| = 0$, oder

(ii) $\alpha = 0$ und $\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| = 0$,

so gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0, \quad \gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi].$$

b) Zeigen Sie: Ist g differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie stetig in $U_r(z_0)$ für ein $r > 0$, dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} dz = i\pi g(z_0), \quad \gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}, t \in [0, \pi].$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $i\pi = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} dz$.

AUFGABE 68 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale (es gilt jeweils $t \in [0, 2\pi]$).

a) $\int_{\gamma} \frac{e^{i \cos(z)} \sin(z^4 + 1) - z}{(z-7)^{42}} dz, \quad \gamma(t) = 2 + 3e^{it},$ b) $\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it},$

c) $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + 3z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it},$ d) $\int_{\gamma} \frac{z^3}{z^2 + 1} dz, \quad \gamma(t) = 2e^{it},$

e) $\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8} dz, \quad \gamma(t) = 3e^{-it},$ f) $\int_{\gamma} \frac{\exp(iz^2)}{(z - \sqrt{\pi/2})^3} dz, \quad \gamma(t) = 2 + e^{it},$

AUFGABE 69 (ÜBUNG)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

mit Hilfe der bisher verfügbaren Techniken der Funktionentheorie zu berechnen. Hierfür seien für $R, \varepsilon > 0$ die folgenden Wege definiert.

$$\gamma_{1,\varepsilon,R}(t) = t, \quad t \in [\varepsilon, R],$$

$$\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi],$$

$$\gamma_{3,\varepsilon,R}(t) = t, \quad t \in [-R, -\varepsilon],$$

$$\gamma_{4,\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$

Betrachten Sie nun die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ und finden Sie anhand obiger Wege einen Weg, für den Sie den Cauchyschen Integralsatz anwenden können. Führen Sie dann den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ unter Zuhilfenahme von **AUFGABE 67** durch.

AUFGABE 70 (TUTORIUM)

Wir möchten die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

berechnen. Seien dazu für $R > 0$ die drei Wege

$$\gamma_{1,R}(t) = t, \quad \gamma_{2,R}(t) = R + it, \quad \gamma_{3,R}(t) = t(i+1),$$

gegeben, jeweils mit $0 \leq t \leq R$.

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen, dass

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der Fresnel-Integrale, indem Sie in a) den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ betrachten und dabei $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ verwenden.

AUFGABE 71 (ÜBUNG)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 + 1)(2z + 1)} dz$$

mit $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, wobei $r > 0$ beliebig aber derart gewählt sei, dass das Integral wohldefiniert sei.

b) Sei $f \in H(\mathbb{C})$ nicht konstant. Zeigen Sie, dass zu $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ existiert mit $f(z_n) \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$.

AUFGABE 72 (TUTORIUM)

a) Beweisen Sie: Ist $f \in H(\mathbb{C})$ mit $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert genau eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ mit

- | | |
|---|--|
| (i) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^4} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$ | (ii) $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{ k ^5} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$ |
| (iii) $f(k) = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$ | (iv) $f\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \left(4 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ |