

## HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

### LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 12. ÜBUNGSBLATT

#### AUFGABE 67 (ÜBUNG)

a) Beweisen Sie das **LEMMA VON JORDAN**: Ist  $f$  stetig auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0\}$  für ein  $R_0 > 0$  sowie entweder

(i)  $\alpha > 0$  und  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| = 0$ , oder

(ii)  $\alpha = 0$  und  $\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| = 0$ ,

so gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0, \quad \gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi].$$

b) Zeigen Sie: Ist  $g$  differenzierbar in  $z_0 \in \mathbb{C}$  sowie stetig in  $U_r(z_0)$  für ein  $r > 0$ , dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} dz = i\pi g(z_0), \quad \gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}, t \in [0, \pi].$$

*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst  $i\pi = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} dz$ .

#### LÖSUNGSVORSCHLAG

a) (i) Für  $R \geq R_0$  gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{it}) e^{i\alpha R(\cos(t) + i\sin(t))} \cdot iRe^{it} dt \right| \\ &\leq R \int_0^\pi |f(Re^{it})| e^{-R\alpha \sin(t)} dt \leq R \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \int_0^\pi e^{-R\alpha \sin(t)} dt \end{aligned}$$

Nun nutzen wir zuerst die Symmetrie der Sinusfunktion aus, um

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-R\alpha \sin(t)} dt &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\alpha \sin(t)} dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{-R\alpha \sin(t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\alpha \sin(t)} dt - \int_{\pi/2}^0 e^{-R\alpha \sin(\pi-s)} ds = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\alpha \sin(t)} dt \end{aligned}$$

zu erhalten. Auf dem Intervall  $[0, \pi/2]$  gilt  $\sin(t) \geq 2t/\pi$ , da der Sinus hier konkav ist. Insgesamt folgt also wegen der Monotonie der Exponentialfunktion, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq 2R \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\alpha}{\pi} \cdot t} dt \\ &= \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-R\alpha}) \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \leq \frac{\pi}{\alpha} \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(ii) Mit  $\alpha = 0$  folgt für  $R \geq R_0$  sofort

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq L(\gamma_R) \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| = \pi R \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

b) Wir stellen zuerst fest, dass

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = i\pi.$$

Damit gilt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} dz - i\pi g(z_0) = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Da  $g$  differenzierbar in  $z_0$  und stetig auf  $U_r(z_0)$  ist, ist

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0, \\ g'(z_0), & z = z_0, \end{cases}$$

auf dieser Umgebung stetig und damit auf  $\overline{U_{r/2}(z_0)}$  beschränkt. Für  $\varepsilon \leq r/2$  gilt also

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z - z_0} dz - i\pi g(z_0) \right| = \left| \int_{\gamma_\varepsilon} h(z) dz \right| \leq L(\gamma_\varepsilon) \max_{|z| \leq \frac{r}{2}} |h(z)| = \pi \varepsilon \max_{|z| \leq \frac{r}{2}} |h(z)| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

### AUFGABE 68 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale (es gilt jeweils  $t \in [0, 2\pi]$ ).

- a)  $\int_{\gamma} \frac{e^{i \cos(z)} \sin(z^4 + 1) - z}{(z-7)^{42}} dz, \quad \gamma(t) = 2 + 3e^{it},$       b)  $\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it},$   
c)  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + 3z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it},$       d)  $\int_{\gamma} \frac{z^3}{z^2 + 1} dz, \quad \gamma(t) = 2e^{it},$   
e)  $\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8} dz, \quad \gamma(t) = 3e^{-it},$       f)  $\int_{\gamma} \frac{\exp(iz^2)}{(z - \sqrt{\pi}/2)^3} dz, \quad \gamma(t) = 2 + e^{it},$

### LÖSUNGSVORSCHLAG

Für die Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes (CIS) und der Cauchyschen Integralformel (CIF) bemerken wir zuerst, dass offene Kugeln in  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängend sind und dass alle auftretenden Wege außer in e) positiv orientierte Kreise (einfach durchlaufen, geschlossen) sind.

a) Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{i \cos(z)} \sin(z^4 + 1) - z}{(z-7)^{42}}$$

ist holomorph in  $G = U_4(2)$  als Verkettung holomorpher Funktionen und wegen  $(z-7)^{42} \neq 0$  auf  $G$ . Somit folgt aus dem CIS, dass

$$\int_{\gamma} \frac{e^{i \cos(z)} \sin(z^4 + 1) - z}{(z-7)^{42}} dz = 0.$$

- b) Die Funktion  $f(z) = \cos(\pi z)$  ist holomorph in  $G = \mathbb{C}$ . Da 0 im Inneren des Kreises liegt, folgt aus der CIF, dass

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i.$$

- c) Die Funktion  $f(z) = \frac{e^z}{z+3}$  ist holomorph in  $G = U_2(0)$ . Da 0 im Inneren des Kreises liegt, folgt aus der CIF, dass

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2+3z} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i \cdot f(0) = \frac{2}{3}\pi i.$$

- d) Wir beginnen mit einer Partialbruchzerlegung. Für  $z \neq \pm i$  gilt

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i}$$

für gewisse  $A, B \in \mathbb{C}$ . Multiplizieren mit  $z^2+1$  liefert

$$1 = (A+B)z + i(B-A).$$

Da somit  $(A+B)z$  für alle  $z \neq \pm i$  der konstanten Funktion  $1 - i(B-A)$  entsprechen muss, folgern wir  $A = -B$  und deshalb  $A = i/2$ ,  $B = -i/2$ . Da die Funktion  $f(z) = z^3$  holomorph in  $G = \mathbb{C}$  ist, folgt mit Hilfe der Partialbruchzerlegung, der CIF und der Tatsache, dass  $\pm i$  im Inneren des Kreises liegt, dass

$$\int_{\gamma} \frac{z^3}{z^2+1} dz = \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-(-i)} dz - \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-i} dz = \frac{i}{2} 2\pi i \cdot (-i)^3 - \frac{i}{2} 2\pi i \cdot i^3 = -2\pi i.$$

- e) Wir stellen zuerst fest, dass die Funktion  $f(z) = \sin(\pi z)$  holomorph in  $G = \mathbb{C}$  ist mit den Ableitungen

$$f^{(2k)}(z) = (-1)^k \pi^{2k} \sin(\pi z), \quad f^{(2k+1)}(z) = (-1)^k \pi^{2k+1} \cos(\pi z),$$

für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Zudem wird der Rand des Kreises ein Mal im Uhrzeigersinn durchlaufen. Definieren wir die positiv orientierte Variante des Weges mit

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2\pi - t) = \gamma(-t) = 3e^{it}$$

für  $t \in [0, 2\pi]$ , so sehen wir, dass wegen  $\gamma'(2\pi - t) = -\tilde{\gamma}'(t)$

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\pi \gamma(t))}{(\gamma(t)-2)^8} \gamma'(t) dt \stackrel{s=2\pi-t}{=} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\pi \tilde{\gamma}(s))}{(\tilde{\gamma}(s)-2)^8} (-\tilde{\gamma}'(s))(-1) ds = - \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8} dz$$

Der Punkt  $z_0 = 2$  liegt innerhalb dieses Kreises, weshalb aus der CIF für Ableitungen folgt, dass

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8} dz = -\frac{2\pi i}{7!} f^{(7)}(2) = -\frac{2\pi i}{7!} (-1)^3 \pi^7 \cos(2\pi) = \frac{2\pi^8 i}{7!}.$$

- f) Wir merken an, dass die Funktion  $f(z) = \exp(iz^2)$  holomorph in  $G = \mathbb{C}$  ist und für die ersten beiden Ableitungen gilt, dass

$$f'(z) = 2iz \exp(iz^2), \quad f''(z) = 2i \exp(iz^2) - 4z^2 \exp(iz^2).$$

Da  $z_0 = \sqrt{\pi/2}$  innerhalb dieses Kreises liegt (es gilt  $1 < z_0 < 2$ ), folgt mit der CIF für Ableitungen, dass

$$\int_{\gamma} \frac{\exp(iz^2)}{(z - \sqrt{\pi/2})^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(\sqrt{\pi/2}) \operatorname{ind}_{\gamma}(\sqrt{\pi/2}) = \pi i(-2 - 2\pi i) = 2\pi(\pi - i).$$

### AUFGABE 69 (ÜBUNG)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Wert des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

zu berechnen. Hierfür seien für  $R, \varepsilon > 0$  die folgenden Wege definiert.

$$\begin{aligned} \gamma_{1,\varepsilon,R}(t) &= t, \quad t \in [\varepsilon, R], & \gamma_{2,R}(t) &= Re^{it}, \quad t \in [0, \pi], \\ \gamma_{3,\varepsilon,R}(t) &= t, \quad t \in [-R, -\varepsilon], & \gamma_{4,\varepsilon}(t) &= \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Betrachten Sie nun die Funktion  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  und finden Sie anhand obiger Wege einen Weg, für den Sie den Cauchyschen Integralsatz anwenden können. Führen Sie dann den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$  unter Zuhilfenahme von **AUFGABE 67** durch.

### LÖSUNGSVORSCHLAG

Die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -iy \text{ für } y \geq 0\}$$

ist einfach zusammenhängend. Auf dieser Menge ist  $f$  holomorph. Zudem ist  $\gamma_{1,\varepsilon,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,\varepsilon,R} + (\gamma_{4,\varepsilon})_-$  ein geschlossener Weg in dieser Menge. Somit folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$0 = \int_{\gamma_{1,\varepsilon,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,\varepsilon,R} + (\gamma_{4,\varepsilon})_-} f(z) dz = \int_{\gamma_{1,\varepsilon,R}} f(z) dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz + \int_{\gamma_{3,\varepsilon,R}} f(z) dz - \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z) dz,$$

also

$$\int_{\gamma_{1,\varepsilon,R}} f(z) dz + \int_{\gamma_{3,\varepsilon,R}} f(z) dz = \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z) dz - \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz$$

für alle  $\varepsilon, R > 0$ . Betrachten wir die linke Seite dieser Gleichung, so erkennen wir, dass

$$\int_{\gamma_{1,\varepsilon,R}} f(z) dz + \int_{\gamma_{3,\varepsilon,R}} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{t} dt = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Andererseits gilt

$$\int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz \rightarrow 0$$

für  $R \rightarrow \infty$  unter Anwendung von **AUFGABE 64 a**) mit  $\alpha = 1$  und der Funktion  $1/z$ , die die Voraussetzung von (i) erfüllt. Weiter erfüllt die Funktion  $e^{iz}$  die Voraussetzung von **AUFGABE 64 b**) mit  $z_0 = 0$ , weshalb

$$\int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z) dz \rightarrow i\pi$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Insgesamt gilt damit

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \leftarrow 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{\gamma_{4,\varepsilon}} f(z) dz - \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz \rightarrow i\pi$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$ , also

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

### AUFGABE 70 (TUTORIUM)

Wir möchten die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

berechnen. Seien dazu für  $R > 0$  die drei Wege

$$\gamma_{1,R}(t) = t, \quad \gamma_{2,R}(t) = R + it, \quad \gamma_{3,R}(t) = t(i + 1),$$

gegeben, jeweils mit  $0 \leq t \leq R$ .

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen, dass

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der Fresnel-Integrale, indem Sie in a) den Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  betrachten und dabei  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  verwenden.

### LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Wir merken an, dass der Weg  $\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + (\gamma_{3,R})_-$ , definiert durch  $(\gamma_{3,R})_-(t) = \gamma_{3,R}(R - t)$  für  $0 \leq t \leq R$ , den Rand des Dreiecks mit den Ecken  $0, R$  und  $(1 + i)R$  im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Somit gilt mit dem Cauchyschen Integralsatz, den wir hier anwenden können, da  $f(z) = e^{-z^2}$  holomorph in  $\mathbb{C}$  ist, dass

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz - \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz &= \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz + \int_{(\gamma_{3,R})_-} e^{-z^2} dz \\ &= \int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0 \end{aligned}$$

und deshalb

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^R e^{-(R+it)^2} i dt \right| \leq \int_0^R |e^{t^2 - R^2 - 2itR}| dt = \int_0^R e^{t^2 - R^2} dt \\ &\leq \int_0^R e^{Rt - R^2} dt = \left[ \frac{e^{Rt - R^2}}{R} \right]_{t=0}^R = \frac{1 - e^{-R^2}}{R} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache benutzt haben, dass  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}z}$ , sowie die Monotonie der reellen Exponentialfunktion.

c) Zuerst bemerken wir, dass

$$\int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Zusammen mit **b)** und der Formel aus **a)** folgern wir, dass der Grenzwert von  $\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz$  für  $R \rightarrow \infty$  existiert, genauer sogar

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Andererseits berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz &= \int_0^R e^{-2it^2} (1+i) dt \stackrel{s:=\sqrt{2}t}{=} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}R} e^{-is^2} ds \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}R} \cos(s^2) - i \sin(s^2) ds \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \cos(s^2) - i \sin(s^2) ds \quad \text{für } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Der letzte Grenzwert existiert, da wir bereits gesehen haben, dass der Grenzwert des ersten Integrals existiert. Zusammen folgt nun

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx - i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1-i).$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil beider Seiten liefert schließlich

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

### AUFGABE 71 (ÜBUNG)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)} dz$$

mit  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , wobei  $r > 0$  beliebig aber derart gewählt sei, dass das Integral wohldefiniert sei.

- b) Sei  $f \in H(\mathbb{C})$  nicht konstant. Zeigen Sie, dass zu  $a \in \mathbb{C}$  eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  existiert mit  $f(z_n) \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

### LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Der Integrand ist für  $z \notin \{\pm i, -\frac{1}{2}\}$  wohldefiniert und dort auch holomorph, also insbesondere stetig. Damit ist das Integral für  $r \notin \{\frac{1}{2}, 1\}$  definiert. Wir betrachten die drei Fälle getrennt.

$0 < r < \frac{1}{2}$ : Der Integrand ist holomorph auf und  $\gamma_r$  verläuft in der Menge  $U_{\frac{1}{2}}(0)$ . Da diese außerdem konvex ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 + 1)(2z + 1)} dz = 0, \quad 0 < r < \frac{1}{2}.$$

$\frac{1}{2} < r < 1$ : Die Funktion

$$f_1(z) := \frac{\sin(\pi z)}{z^2 + 1}$$

ist holomorph auf und  $\gamma_r$  verläuft innerhalb der Menge  $U_1(0)$ . Da  $\gamma_r$  einfach geschlossen und positiv orientiert ist, folgt aus der Cauchyschen Integralformel, dass

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 + 1)(2z + 1)} dz = \frac{1}{2} \int_{\gamma_r} \frac{f_1(z)}{z - (-1/2)} dz = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot f_1(-1/2) = -\frac{4\pi}{5}i, \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

$1 < r < \infty$ : Hier müssen wir eine Partialbruchzerlegung finden, um die Cauchysche Integralformel verwenden zu können. Wir suchen also Konstanten  $A, B, C \in \mathbb{C}$  mit

$$\frac{1}{(z+i)(z-i)(2z+1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{2z+1}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i, -1/2\}.$$

Multiplizieren wir mit allen auftretenden Faktoren durch, so erhalten wir

$$1 \stackrel{!}{=} A(z-i)(2z+1) + B(z+i)(2z+1) + C(z^2+1).$$

Ist diese Gleichheit für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i, -1/2\}$  erfüllt, so ist sie es wegen der Stetigkeit der Ausdrücke auch für  $z \in \{\pm i, -1/2\}$ . Setzen wir diese drei Werte ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{5}{4}C,$$

$$1 \stackrel{!}{=} 2i \cdot (2i+1) \cdot B = (-4+2i)B,$$

$$1 \stackrel{!}{=} (-2i) \cdot (-2i+1) \cdot A = (-4-2i)A,$$

und mit der Rechenregel  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  (vgl. Aufgabe 1a)(ii)) ergibt sich schließlich  $A = -\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i, B = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i, C = \frac{4}{5}$ . Damit ergibt sich mit

$$f_2(z) := \sin(\pi z),$$

dass  $f_2$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  ist und für  $r > 1$  mit der Cauchyschen Integralformel (alle Umlaufzahlen sind 1)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)} dz &= \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right) \int_{\gamma_r} \frac{f_2(z)}{z-(-i)} dz + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i\right) \int_{\gamma_r} \frac{f_2(z)}{z-i} dz \\ &\quad + \frac{2}{5} \int_{\gamma_r} \frac{f_2(z)}{z-(-1/2)} dz \\ &= \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right) \cdot 2\pi i \cdot f_2(-i) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i\right) \cdot 2\pi i \cdot f_2(i) \\ &\quad + \frac{2}{5} \cdot 2\pi i \cdot f_2(-1/2) \\ &= \frac{2}{5}\pi \sinh(\pi)i - \frac{4}{5}\pi i = \frac{2\pi}{5}(\sinh(\pi) - 2) \cdot i. \end{aligned}$$

- b) Wir nehmen an, dass ein solches  $a \in \mathbb{C}$  existiert, dass für jede Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  gilt, dass  $f(z_n) \not\rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$|f(z) - a| \geq \varepsilon \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir  $z_n$  als das Element definieren, das diese Ungleichung für  $\varepsilon = 1/n$  verletzt und hätten entgegen der Annahme eine entsprechende Folge gefunden. Somit ist die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph (da  $f(z) - a \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ ) und erfüllt  $|h(z)| \leq \varepsilon^{-1}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Der Satz von Liouville liefert nun, dass  $h$  und somit auch  $f = \frac{1}{h} + a$  konstant ist ( $h$  ist per Definition nicht die Nullfunktion), ein Widerspruch.

### AUFGABE 72 (TUTORIUM)

- a) Beweisen Sie: Ist  $f \in H(\mathbb{C})$  mit  $\operatorname{Re} f(z) \leq M$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , so ist  $f$  konstant.

- b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es existiert genau eine Funktion  $f \in H(\mathbb{C})$  mit

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f\left(\frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{k^4} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, & \text{(ii)} \quad f\left(\frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{|k|^5} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \text{(iii)} \quad f(k) &= k^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, & \text{(iv)} \quad f\left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) &= \left(4 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

### LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Wir betrachten die ganze Funktion  $g(z) := e^{f(z)}$ . Für Sie gilt

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^M,$$

womit  $g$  beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist  $g$  konstant und laut Definition nicht die Nullfunktion. Somit existiert ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit

$$e^{\operatorname{Re}(f(z))} e^{i \operatorname{Im}(f(z))} = e^{f(z)} = z_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Wenden wir den Betrag auf die Gleichung an, ergibt sich

$$e^{\operatorname{Re}(f(z))} = |z_0| \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

also  $\operatorname{Re}(f(z)) = \log(|z_0|)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , womit  $\operatorname{Re}(f(z))$  konstant ist. Nach **AUFGABE 62 b)** ist somit  $f$  konstant.

- b) (i) Die Aussage ist richtig. Durch die Funktion  $f(z) = z^4$  ist eine solche Funktion gegeben. Sei  $g$  eine weitere Funktion, die die Voraussetzungen erfüllt. Dann gilt  $g(1/n) = 1/n^4 = f(1/n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $f$  und  $g$  auf der Menge

$$\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

mit Häufungspunkt 0 übereinstimmen. Nach dem Identitätssatz gilt  $g \equiv f$ , womit die Existenz genau einer Funktion gezeigt ist.

- (ii) Die Aussage ist falsch. Wir nehmen an, eine solche Funktion  $f$  existiere. Die Funktion  $g(z) = z^5$  ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  und stimmt auf der Menge

$$\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

mit  $f$  überein nach Voraussetzung. Der Identitätssatz liefert dann  $f \equiv g$ , was ein Widerspruch ist, da

$$g(-1/n) = -1/n^5 \neq 1/n^5 = f(1/n)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (iii) Die Aussage ist falsch. Offensichtlich erfüllt die Funktion  $f(z) = z^2$  alle Forderungen, aber wir können sie mit einer beliebigen ganzen Funktion  $g$  multiplizieren, die  $g(k) = 1$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  erfüllt, beispielsweise  $g(z) = 1 + \sin(\pi z)$ . Somit gibt es mehr als nur eine Funktion, die die Voraussetzungen erfüllt.
- (iv) Die Aussage ist richtig. Schreiben wir die Forderung nach den Funktionswerten um, erhalten wir

$$\begin{aligned} f\left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) &= \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 3\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \\ &= 3e^{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + 2e^{2\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - e^{3\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Eine Funktion in  $H(\mathbb{C})$ , die zusätzlich diese Forderung erfüllt, ist gegeben durch

$$f(z) = 3e^z + 2e^{2z} - e^{3z}$$

Ist  $g$  eine weitere Funktion, die alle Forderungen erfüllt, so stimmt sie mit  $f$  auf der Menge

$$\left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

mit Häufungspunkt  $\log(1) = 0$  überein, womit nach dem Identitätssatz wieder  $g \equiv f$  gilt.