

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

13. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 73 (ÜBUNG)

- a) Beweisen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und hat eine Funktion $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ in $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei g die holomorphe Fortsetzung der Funktion $D \setminus \{z_0\}, z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ auf D sei.

- b) Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(e^z - 1)(z - 1)^2} dz$$

für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{it}$.

AUFGABE 74 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des Residuensatzes, wobei $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $r > 0$ durch $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, gegeben sei.

a) $\int_{\gamma_4} \frac{ze^{iz}}{z - \pi} dz,$

b) $\int_{\gamma_9} \frac{e^z}{(z - 1)(z + 3)^2} dz,$

c) $\int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}} dz,$

d) $\int_{\gamma_1} \frac{z}{e^{iz} - 1} dz.$

AUFGABE 75 (ÜBUNG)

- a) (i) Seien P und Q Polynome über $\mathbb{R}$, wobei der Grad von Q um mindestens zwei größer sei als der Grad von P . Die Funktion $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ habe keinen Pol auf der reellen Achse. Beweisen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}(f, z).$$

- (ii) Berechnen Sie nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx.$$

- b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf G , so ist f konstant auf G .

AUFGABE 76 (TUTORIUM)

- a) Seien P und Q Polynome in zwei Variablen, $R := \frac{P}{Q}$ und die Funktion $t \mapsto R(\cos(t), \sin(t))$ sei stetig (fortsetzbar) auf $[0, 2\pi]$ (was z.B. der Fall ist, falls Q auf $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ nullstellenfrei ist). Sei außerdem

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f, z_k),$$

wobei $z_1, \dots, z_n$ die Pole von f in $U_1(0)$ seien.

- b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4(t)}{1 + \cos(t)} dt = \pi$$

AUFGABE 77 (ÜBUNG)

- a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{1/z} = w$ für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für jedes $r > 0$ unendlich viele Lösungen z mit $|z| \leq r$ besitzt.
- b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{U_1(0)} \subseteq G$. Beweisen Sie: Ist $f \in H(G)$ und $|f|$ konstant auf $\partial U_1(0)$, f jedoch nicht konstant auf G , so besitzt f mindestens eine Nullstelle in $U_1(0)$.
- c) Berechnen Sie alle Logarithmen von $i - 1$ sowie alle zwölften Wurzeln von 1.

AUFGABE 78 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie jeweils das Maximum und Minimum des Betrages der folgenden Funktionen auf der Menge $\overline{U_1(0)}$.

a) $f_1(z) = e^{z^2},$

b) $f_2(z) = z^2 + iz + 1,$

c) $f_3(z) = \frac{z+3}{z-3},$

d) $f_4(z) = 3 - |z|^2.$