Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
22.07.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 73 (Übung)

a) Beweisen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und hat eine Funktion $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ in $z_0 \in D$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z),$$

wobei g die holomorphe Fortsetzung der Funktion $D \setminus \{z_0\}, z \mapsto (z-z_0)^m f(z)$ auf D sei.

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{(e^z - 1)(z-1)^2} \, dz$$

für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{it}$.

Lösungsvorschlag

a) Hat die Funktion f in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, so kann sie nach Satz 22.14 für $z \in U_R(z_0) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ in eine Laurentreihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickelt werden. Somit gilt für $z \in U_R(z_0) \setminus \{z_0\}$

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-z_0)^n,$$

was in z_0 holomorph fortgesetzt werden kann, und

$$\frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=m-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-(m-1))!} a_{n-m} (z-z_0)^{n-(m-1)}$$
$$\xrightarrow{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} (m-1)! \cdot a_{-1} = a_{-1} = \operatorname{res}(f, z_0)$$

nach Definition des Residuums.

b) In der offenen, einfach zusammenhängenden Menge $U_3(0)$ liegt sowohl der einfach geschlossene, positiv orientierte Weg γ als auch die beiden Singularitäten 0 und 1 von

$$f : U_3(0) \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{(e^z - 1)(z-1)^2},$$

die ebenfalls von γ umschlossen werden. 1 ist per Definition ein Pol zweiter Ordnung von f, 0 ist wegen der Existenz von $\lim_{z\to 0} zf(z) \neq 0$ (siehe unten) ein Pol erster Ordnung. Damit ist f holomorph und nach **a)** (!) gilt

$$\operatorname{res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z-0}{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^0} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(\mathrm{e}^{\cdot})'(0)} \cdot \frac{1}{(0-1)^2} = 1$$

sowie

$$\operatorname{res}(f,1) = \lim_{z\to 1} ((\cdot - 1)^2 f(\cdot))'(z) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\cdot} - 1}\right)'(z) = \lim_{z\to 1} -\frac{\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z-1)^2} = -\frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}.$$

Nach dem Residuensatz gilt nun

$$\int_\gamma \frac{1}{(\mathrm{e}^z-1)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(1 - \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}\right)$$

Aufgabe 74 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe des Residuensatzes, wobei $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ für alle $r > 0$ durch $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,2\pi]$, gegeben sei.

a) $\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z,$

b) $\displaystyle\int_{\gamma_9} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z,$

c) $\displaystyle\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{\frac{z}{1-z}}\,\mathrm{d}z,$

d) $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}\,\mathrm{d}z.$

Lösungsvorschlag

γ_r ist ein einfach geschlossener, positiv orientierter Weg für alle $r > 0$.

a) Der Integrand $f(z) = \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}$ besitzt eine einfache Polstelle bei $z_0 = \pi$. Diese liegt im Inneren des Integrationsweges. Der Residuensatz liefert

$$\int_{\gamma_4} \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}(f,z_0).$$

Das Residuum berechnet sich über

$$\operatorname{res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = \pi e^{\mathrm{i}\pi} = -\pi.$$

Insgesamt ist also $\int_{\gamma_4} \frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\,\mathrm{d}z = -2\mathrm{i}\pi^2$.

b) Der Integrand $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt einen Pol erster Ordnung bei $z_0 = 1$ und einen Pol zweiter Ordnung bei $z_1 = -3$. Da alle Polstellen im Inneren des Integrationsweges liegen, liefert der Residuensatz

$$\int_{\gamma_9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\operatorname{res}(g,z_0) + \operatorname{res}(g,z_1)).$$

Die Residuen berechnen sich nach **Aufgabe 73 a)** zu

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(g, z_0) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) g(z) = \frac{e}{16}, \\
\operatorname{res}(g, z_1) &= \lim_{z \to z_1} ((\cdot - z_1)^2 g(\cdot))'(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{e^z (z-1) - e^z}{(z-1)^2} = -\frac{5e^{-3}}{16}
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\int_{\gamma_9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} \, \mathrm{d}z = \frac{\pi \mathrm{i}}{8}(e - 5e^{-3})$.

c) Wir berechnen die Laurententwicklung von $h(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$. Es gilt

$$h(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1 + \frac{1}{1-z}} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^{-k}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Die isolierte Singularität bei $z_0 = 1$ liegt im Inneren des Integrationsweges. Der Residuensatz liefert

$$\int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}} \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}(h, z_0).$$

Das Residuum ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ in der Laurentreihe, also $\operatorname{res}(h, z_0) = -\frac{1}{e}$. Insgesamt ist also $\int_{\gamma_2} e^{\frac{z}{1-z}} \, \mathrm{d}z = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{e}$.

d) Wegen

$$j(z) = \frac{z}{e^{\mathrm{i}z} - 1} = \frac{z}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} - 1} = \frac{1}{\mathrm{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^{k-1}}{k!}}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, hat j eine hebbare Singularität bei $z_0 = 0$, die im Inneren des Integrationsweges liegt. Alle weiteren isolierten Singularitäten von j bei $z_k = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ liegen nicht im Inneren des Integrationsweges. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_{\gamma_1} \frac{z}{e^{\mathrm{i}z} - 1} \, \mathrm{d}z = 0.$$

Aufgabe 75 (Übung)

a) (i) Seien P und Q Polynome über $\mathbb{R}$, wobei der Grad von Q um mindestens zwei größer sei als der Grad von P. Die Funktion $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ habe keinen Pol auf der reellen Achse. Beweisen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}(f, z).$$

(ii) Berechnen Sie nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} \, \mathrm{d}x.$$

b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf G, so ist f konstant auf G.

Lösungsvorschlag

a) (i) Die Funktion $f|_{\mathbb{R}}$ ist stetig. Schreiben wir

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \qquad Q(z) = \sum_{n=0}^{N+2} b_n z^n,$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$ und $b_{N+2} \neq 0$ nach Voraussetzung, so können wir wir $x_0 > 1$ so wählen, dass für $|x| > x_0$

$$\Big|\sum_{n=1}^{N+2} b_{N+2-n} x^{-n}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{N+2} |b_{N+2-n}|\,|x|^{-n} \leqslant |x_0|^{-1} \sum_{n=1}^{N+2} |b_{N+2-n}| \leqslant \frac{|b_{N+2}|}{2}$$

gilt. Für $|x| > x_0 > 1$ erhalten wir dann also

$$\begin{aligned}|f(x)| \leqslant & \frac{|x|^N \sum_{n=0}^{N} |a_n|}{|x|^{N+2}\,|b_{N+2} + \sum_{n=0}^{N+1} b_n x^{n-(N+2)}|} \\ & \leqslant \frac{1}{|x|^2} \frac{\sum_{n=0}^{N} |a_n|}{||b_{N+2}| - |\sum_{n=1}^{N+2} b_{N+2-n} x^{-n}||} \leqslant \frac{1}{|x|^2} \frac{2\sum_{n=0}^{N} |a_n|}{|b_{N+2}|},\end{aligned}$$

was eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0]$ ist. Da f als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[-x_0, x_0]$ integrierbar ist, folgt die Existenz des Integrals auf der linken Seite. Wählen wir nun als Integrationsweg $\gamma_R = \gamma_{R,1} + \gamma_{R,2}$ mit

$$\gamma_{R,1}(t) = t, t \in [-R, R], \qquad \gamma_{R,2}(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi],$$

wobei wir $R > 0$ so groß wählen, dass γ alle Nullstellen von Q in der Halbebene mit positivem Imaginärteil umschließt, dann folgt mit Hilfe des Residuensatzes (f ist meromorph auf $\mathbb{C}$), dass

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}(f, z),$$

und das unabhängig von R. Können wir jetzt noch zeigen, dass

$$\int_{\gamma_{R,2}} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$$

für $R \to \infty$, ist die Aussage bewiesen, da

$$\int_{\gamma_{R,1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $R \to \infty$. Auf dem Weg $\gamma_{R,2}$ gilt $|z| = R$ und wir erhalten (mit der Zusatzforderung $R > x_0$) mit der Rechnung von oben, dass

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{R^2} \frac{2\sum_{n=0}^{N} |a_n|}{|b_{N+2}|},$$

womit schließlich mit der Standardabschätzung für Wegintegrale folgt, dass für $R \to \infty$

$$\int_{\gamma_{R,2}} f(z)\,\mathrm{d}z \leqslant L(\gamma_{R,2})\frac{1}{R^2}\frac{2\sum_{n=0}^{N}|a_n|}{|b_{N+2}|} = \frac{1}{R}\frac{2\pi\sum_{n=0}^{N}|a_n|}{|b_{N+2}|} \to 0.$$

(ii) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z+\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(z-\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(z+\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})(z-\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})}$$

erfüllt die Voraussetzungen von (i), da sie rational ist und keine rellen Pole besitzt. Alle vier Singularitäten sind Pole erster Ordnung. Nach **Aufgabe 73 a)** gilt

$$\operatorname{res}\left(f,\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z\to\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}}\left(z-\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}\right)f(z) = \frac{1}{(\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})(\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{i}+1),$$

$$\operatorname{res}\left(f,\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{z\to\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}}\left(z-\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}\right)f(z) = \frac{1}{(\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}-\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{2}})(\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}})} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{i}-1).$$

Somit folgt mit Aufgabenteil (i), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{i}+1)-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\mathrm{i}-1)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

b) Wir nehmen jeweils an, dass f nicht konstant ist. Es gilt

$$f(G) \subseteq A_i, \qquad i = 1,\dots,3,$$

wobei $A_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a\}$, $A_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = b\}$ und $A_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ für gewisse konstanten a, b und r. Nach dem Satz der Gebietstreue ist $f(G)$ insbesondere offen. Es ist jedoch keine (nichtleere) Teilmenge von einem der A_i offen. Würde ein $z_0 \in A_1$ und ein $\varepsilon > 0$ existieren mit $U_\varepsilon(z_0) \subseteq A_1$, so wäre $z_0 + \frac{\varepsilon}{2} \in A_1$, aber $\operatorname{Re}(z_0+\frac{\varepsilon}{2}) = a + \frac{\varepsilon}{2} \neq a$. Analog ergibt sich die Aussage für A_2 und A_3. Also kann $f(G)$ nicht offen sein, ein Widerspruch.

Aufgabe 76 (Tutorium)

a) Seien P und Q Polynome in zwei Variablen, $R := \frac{P}{Q}$ und die Funktion $t \mapsto R(\cos(t), \sin(t))$ sei stetig (fortsetzbar) auf $[0, 2\pi]$ (was z.B. der Fall ist, falls Q auf $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ nullstellenfrei ist). Sei außerdem

$$f(z) := \frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right).$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,\mathrm{d}t = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(f, z_k),$$

wobei $z_1, \dots, z_n$ die Pole von f in $U_1(0)$ seien.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4(t)}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \pi$$

Lösungsvorschlag

a) Zuerst stellen wir fest, dass f eine rationale Funktion in z ist, sodass sie meromorph auf $\mathbb{C}$ ist. Als nächstes sei angemerkt, dass

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z|z|^2+\overline{z}}{2|z|^2}, \qquad \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{z|z|^2-\overline{z}}{2|z|^2},$$

sodass für $z=x+\mathrm{i}y\in\partial U_1(0)$ (wegen $|z|=1$) gilt, dass

$$f(z)=\frac{R(x,y)}{z}.$$

Also hat f nach Voraussetzung keine Pole auf $\partial U_1(0)$. Somit existiert für $\gamma(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ das Integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ und nach dem Residuensatz gilt

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(f,z_k)=\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{R(\cos(t),\sin(t))}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}R(\cos(t),\sin(t))\,\mathrm{d}t,$$

womit die Behauptung folgt.

b) Als rationale Funktion von zwei Variablen hat R hier die Form

$$R(x,y)=\frac{y^4}{1+x}.$$

Der Integrand ist stetig außerhalb von $t=\pi$ und kann dort stetig durch 0 fortgesetzt werden, wie man z.B. anhand von L'Hospital erkennt. Damit ist **a)** anwendbar und es gilt

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{(\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z}))^4}{1+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}=\frac{1}{16z^4}\frac{(z^2-1)^4}{z+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{8z^4}\frac{(z-1)^4(z+1)^4}{z^2+2z+1}=\frac{1}{8}\frac{(z+1)^2(z-1)^4}{z^4}.$$

f hat also ausschließlich in 0 einen Pol (der Ordnung vier). Das Residuum lässt sich entweder über **Aufgabe 73 a)** oder über Ausmultiplizieren und betrachten des Koeffizienten vor $\frac{1}{z}$ berechnen und lautet $\frac{1}{2}$. Somit ergibt sich aus **a)**, dass

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4(t)}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t=2\pi\operatorname{res}(f,0)=\pi.$$

Aufgabe 77 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\mathrm{e}^{1/z}=w$ für $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ für jedes $r>0$ unendlich viele Lösungen z mit $|z|\leqslant r$ besitzt.

b) Sei $G\subseteq\mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{U_1(0)}\subseteq G$. Beweisen Sie: Ist $f\in H(G)$ und $|f|$ konstant auf $\partial U_1(0)$, f jedoch nicht konstant auf G, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in $U_1(0)$.

c) Berechnen Sie alle Logarithmen von $\mathrm{i}-1$ sowie alle zwölften Wurzeln von 1.

Lösungsvorschlag

a) Nach der Charakterisierung der Logarithmen sind die Lösungen z_k der Gleichung

$$e^{1/z} = w$$

gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{z_k} = \log|w| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg} w + 2k\pi),$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist äquivalent zu

$$z_k = \frac{1}{\log|w| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg} w + 2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

wobei $k = 0$ ausgeschlossen werden muss, falls $w = 1$. Offenbar sind die z_k paarweise verschieden und es gilt

$$|z_k|^2 = \frac{1}{(\log|w|)^2 + (\operatorname{Arg} w + 2k\pi)^2} \to 0 \qquad \text{für } |k| \to \infty.$$

Also existieren zu jedem $r > 0$ unendlich viele z_k mit $|z_k| \le r$ und $\exp(1/z_k) = w$.

b) Aus der Vorlesung ist das Maximumprinzip bekannt. Hat eine Funktion unter denselben Voraussetzungen keine Nullstelle, können wir dieselbe Aussage über das Minimum machen, indem wir das Maximumprinzip auf $\frac{1}{f}$ anwenden (Minimumprinzip). Wir nehmen an, f hätte keine Nullstelle in $U_1(0)$. Es gilt insbesondere $f \in H(U_1(0))$ und $f \in C(\overline{U_1(0)})$. Deshalb folgt mit dem Maximum- und Minimumprinzip

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U_1(0)} |f(z)|$$

und

$$\min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f(z)| = \min_{z \in \partial U_1(0)} |f(z)|.$$

Da $|f|$ auf $\partial U_1(0)$ jedoch konstant ist, sind die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite gleich, also auch diejenigen auf der Linken, womit $|f|$ konstant auf $\overline{U_1(0)}$ ist. Damit ist f auf $U_1(0)$ konstant (vgl. **Aufgabe 75 a)**). Alternativ: Wäre dies nicht der Fall, so ist

$$f(U_1(0)) \subseteq \partial U_{|f(0)|}(0),$$

ein Gebiet. Da keine nichtleere Teilmenge von $\partial U_{|f(0)|}(0)$ offen ist, ist dies nicht möglich. Schließlich folgt aus dem Identitätssatz, dass f auch auf G konstant sein muss, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

c) Nach Satz 22.18 sind alle Logarithmen von $\mathrm{i} - 1$ gegeben durch

$$z_k = \log|\mathrm{i} - 1| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(\mathrm{i} - 1) + 2k\pi\mathrm{i}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $|\mathrm{i} - 1| = \sqrt{2}$ und $\operatorname{Arg}(\mathrm{i} - 1) = \frac{3\pi}{4}$ folgt demnach, dass

$$z_k = \frac{1}{2}\log(2) + \mathrm{i}\pi(\frac{3}{4} + 2k)$$

für $k \in \mathbb{Z}$ alle Logarithmen von $\mathrm{i}-1$ sind.
Alle zwölften Wurzeln von 1 sind durch

$$w_k = \sqrt[12]{|1|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\operatorname{Arg}(1)+2k\pi}{12}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{6}}$$

für $k = 0,\dots,11$ gegeben. Die bekannten Werte von Sinus und Kosinus an diesen Punkten ergeben die Wurzeln ± 1, $\pm\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe 78 (Tutorium)

Bestimmen Sie jeweils das Maximum und Minimum des Betrages der folgenden Funktionen auf der Menge $\overline{U_1(0)}$.

a) $f_1(z) = \mathrm{e}^{z^2}$, **b)** $f_2(z) = z^2 + \mathrm{i}z + 1$,

c) $f_3(z) = \frac{z+3}{z-3}$, **d)** $f_4(z) = 3 - |z|^2$.

Lösungsvorschlag

Aus der Vorlesung ist das Maximumprinzip bekannt. Hat eine Funktion unter denselben Voraussetzungen keine Nullstelle, können wir dieselbe Aussage über das Minimum machen, indem wir das Maximumprinzip auf $\frac{1}{f}$ anwenden.

a) Es gilt für $z = x + \mathrm{i}y$, dass

$$|f_1(z)| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z^2)} = \mathrm{e}^{x^2-y^2} \in [\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}]$$

über triviale Abschätzungen mit Hilfe der Monotonie der Exponentialfunktion. Diese Werte werden auch angenommen, denn

$$|f_1(1)| = \mathrm{e}, \qquad |f_1(\mathrm{i})| = \mathrm{e}^{-1}.$$

Somit gilt

$$\max_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_1(z)| = \mathrm{e}, \qquad \min_{z\in\overline{U_1(0)}} |f_1(z)| = \mathrm{e}^{-1}.$$

b) Zuerst stellen wir fest, dass für $z = x + \mathrm{i}y$ gilt, dass

$$f_2(z) = (x^2 - y^2 - y + 1) + \mathrm{i}x(2y + 1),$$

sodass wir mit $z = \mathrm{i}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ eine Nullstelle von f_2 in $U_1(0)$ gefunden haben. Für das Maximum gilt nach dem Maximumprinzip, dass es sich auf dem Rand befindet. Sei also $z(t) = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t) \in \partial U_1(0)$ (o.B.d.A. $t \in (-\pi, \pi]$) und $g(t) := |f_2(z(t))|^2$. Wir berechnen das Maximum von g, welches zwingendermaßen eine Nullstelle von g' sein muss, denn g ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und gleichzeitig 2π-periodisch. Es gilt

$$\begin{aligned} g(t) &= |z(t)^2 + \mathrm{i}z(t) + 1|^2 = (\cos(2t) - \sin(t) + 1)^2 + (\sin(2t) + \cos(t))^2 \\ &= 3 - 2\sin(t)\cos(2t) + 2\cos(t)\sin(2t) + 2\cos(2t) - 2\sin(t) = 3 + 2\cos(2t), \end{aligned}$$

wobei wir die üblichen Rechenregeln inklusive Additionstheoreme verwenden. Damit folgt

$$g'(t) = -4\sin(2t)$$

welches seine Nullstellen für $t_1 = 0$ und $t_2 = \frac{\pi}{2}$ besitzt. Wegen $g(t_2) = 5 > 1 = g(t_1)$ ist 5 das Maximum von g. Also gilt

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_2(z)| = \sqrt{5}, \qquad \min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_2(z)| = 0.$$

c) Für $z \in \overline{U_1(0)}$ nimmt die Funktion $|z+3|$ ihr Maximum im Punkt $z = 1$ und ihr Minimum im Punkt $z = -1$ an. Die Funktino $|z-3|$ nimmt ihr Maximum im Punkt $z = -1$ und ihr Minimum im Punkt $z = 1$ an. Dies folgt aus Skizzen oder einfachen Ungleichungen über $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x \in [-1, 1]$ und $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. Deshalb gilt

$$|f_3(z)| = \frac{|z+3|}{|z-3|} \begin{cases} \leqslant \frac{|1+3|}{|1-3|} = 2, \\ \geqslant \frac{|-1+3|}{|-1-3|} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Da die jeweiligen Werte in $z = \pm 1$ tatsächlich angenommen werden, folgt

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_3(z)| = 2, \qquad \min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_3(z)| = \frac{1}{2}.$$

d) Wir schreiben $z \in \overline{U_1(0)}$ als $z = re^{\mathrm{i}t}$ mit $0 \leqslant r \leqslant 1$ und $t \in (-\pi, \pi]$. Es gilt

$$|f_4(z)| = f_4(z) = 3 - r^2,$$

was für $r = 0$ maximiert und für $r = 1$ minimiert ist. Es gilt also

$$\max_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_4(z)| = 3, \qquad \min_{z \in \overline{U_1(0)}} |f_4(z)| = 2.$$

Dass das Maximum nicht auf dem Rand liegt, widerspricht deshalb nicht dem Maxmimumprinzip, da f_4 nur in 0 komplex differenzierbar ist.