Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
22.07.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 76 (Übung)

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) $f(x) = x\mathrm{e}^{-|x|}$,

b) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & , -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & , 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$

e) $f(x) = \frac{x}{x^4+2x^2+1}$.

d) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$,

Lösungsvorschlag

a) f ist absolut integrierbar wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} |x|\mathrm{e}^{-|x|} \, \mathrm{d}x = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R x\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = 2.$$

Deshalb ist nach **Satz 23.4** $\mathcal{F}g$ mit $g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ differenzierbar und

$$(\mathcal{F}g)'(\xi) = \mathcal{F}(-\mathrm{i}f)(\xi) = -\mathrm{i}\mathcal{F}f(\xi).$$

In der Vorlesung wurde $\mathcal{F}g$ bereits berechnet mit

$$\mathcal{F}g(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

Deshalb folgt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{i}(\mathcal{F}g)'(\xi) = -\frac{4\xi\mathrm{i}}{(1+\xi^2)^2}.$$

b) Da f nur auf der kompakten Menge $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nicht Null ist und dort stetig, ist es absolut integrierbar. Es gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

und deshalb für $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+\xi)x}\right) \mathrm{d}x.$$

Für $\xi \neq \pm 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(1-\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)x} - \frac{1}{\mathrm{i}(1+\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\xi)x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}(1-\xi)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}(1+\xi)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+\xi)\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\xi)\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\xi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}}{1-\xi^2} = \frac{2\cos(\xi\frac{\pi}{2})}{1-\xi^2}.
\end{aligned}$$

Im Fall $\xi = 1$ ist

$$\mathcal{F}f(1) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

und für $\xi = -1$ gilt

$$\mathcal{F}f(-1) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dabei haben wir $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1$ benutzt.

c) Bezeichnen wir die Funktion aus Teil **b)** mit g, so gilt

$$f(x) = g(x - \pi/2)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach **Satz 23.4** gilt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\xi}}{1-\xi^2} & ,\xi \neq \pm 1, \\ -\mathrm{i}\frac{\pi}{2} & ,\xi = 1, \\ \mathrm{i}\frac{\pi}{2} & ,\xi = -1. \end{cases}$$

d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2+1} = g(x+2)$$

mit $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Wir berechnen zunächst $\mathcal{F}g$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für die Funktion $h(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ gilt, dass

$$\mathcal{F}h(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also $\mathcal{F}g = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)$. Bekanntermaßen ist h absolut integrierbar, genauso wie $\mathcal{F}h$ wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}h(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = 4\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = 4\lim_{R\to\infty}[\arctan(\xi)]_{\xi=0}^R = 2\pi.$$

Deshalb erfüllt h die Voraussetzungen für die Inversionsformel und es gilt

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}(\mathcal{F}h)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)(-x).$$

Somit gilt

$$\mathcal{F}g(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)(\xi) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi h(-\xi) = \pi\mathrm{e}^{-|\xi|}$$

und schließlich mit **Satz 23.4**

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{e}^{2\xi\mathrm{i}}\mathcal{F}g(\xi) = \pi\mathrm{e}^{2\xi\mathrm{i}-|\xi|}.$$

e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}g'(x)$$

mit g wie in **d)**. Da g und g' absolut integrierbar sind (der Nenner ist nullstellenfrei und das dortige Polynom hat einen um 2 bzw. 3 höheren Grad als dasjenige im Zähler), folgt aus **Satz 23.4**

$$\mathcal{F}f(\xi) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}g'(\xi) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\xi\mathcal{F}g(\xi) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\xi\pi\mathrm{e}^{-|\xi|}$$

Aufgabe 77 (Übung)

Zu $\alpha > 0$ definiere

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\alpha}}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\varphi_\alpha * \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta}$$

für alle $\alpha, \beta > 0$ gilt.

Lösungsvorschlag

Laut Vorlesung gilt ($\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$)

$$\mathcal{F}\varphi_1(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Für jedes $\alpha > 0$ gilt

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x/\sqrt{\alpha})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\varphi_1(x/\sqrt{\alpha}).$$

Nach **Satz 23.4** gilt nun

$$\mathcal{F}\varphi_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{1/\sqrt{\alpha}}\mathcal{F}\varphi_1\left(\frac{\xi}{1/\sqrt{\alpha}}\right) = \mathcal{F}\varphi_1(\sqrt{\alpha}\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\xi^2}{2}}.$$

Für alle $\alpha, \beta > 0$ sind φ_α und φ_β absolut integrierbar und beschränkt, womit $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$ absolut integrierbar und beschränkt ist nach Satz 23.9. Außerdem gilt

$$\mathcal{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(\xi) = \mathcal{F}\varphi_\alpha(\xi)\cdot\mathcal{F}\varphi_\beta(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\xi^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\beta\xi^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{(\alpha+\beta)\xi^2}{2}} = \mathcal{F}\varphi_{\alpha+\beta}(\xi).$$

Somit sind $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$, $\mathcal{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)$, $\varphi_{\alpha+\beta}$ und $\mathcal{F}\varphi_{\alpha+\beta}$. Damit sind die Voraussetzungen der Inversionsformel erfüllt und es gilt

$$(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathcal{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathcal{F}(\varphi_{\alpha+\beta})(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \varphi_{\alpha+\beta}(x).$$

für $x \in \mathbb{R}$ und somit die geforderte Gleichheit.

Aufgabe 78 (Übung)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) Zeigen Sie: Sind f, g und $\mathcal{F}g$ absolut integrierbar, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Folgern Sie daraus: Falls

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}f \cap \operatorname{supp}\mathcal{F}g = \emptyset,$$

dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = 0,$$

wobei $\operatorname{supp} h = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}}$ den Träger von $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnet.

Lösungsvorschlag

a) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leqslant 1 \\ 0 & , |x| > 1. \end{cases}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\mathcal{F}f(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\xi)}{\xi} & , \xi \neq 0 \\ 2 & , \xi = 0. \end{cases}$$

Nach dem Satz von Plancherel folgt

$$2 = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$$

beziehungsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \pi.$$

Da $\xi \mapsto \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$ eine gerade Funktion ist folgt somit

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

b) Da f und $\mathcal{F}g$ absolut integrierbar sind, folgt mit **Satz 23.5**, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}g})(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Weiter gilt

$$\overline{\mathcal{F}g(\xi)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}g(x)\,\mathrm{d}x} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\xi)x}\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}\overline{g}(-\xi).$$

Da auf g absolut integrierbar ist, folgt aus der Inversionsformel, dass

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}g})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathcal{F}\overline{g}(-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathcal{F}\overline{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\overline{g(x)}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert die erste Behauptung.
Mit $\operatorname{supp}\mathcal{F}f \cap \operatorname{supp}\mathcal{F}g = \emptyset$ folgt auch $\operatorname{supp}\mathcal{F}f \cap \operatorname{supp}\overline{\mathcal{F}g} = \emptyset$. Somit ist

$$\mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)} = 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$