Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.

SS2017
26.04.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt

$$\mathrm{Bild}(A)^{\perp} = \mathrm{Kern}(A^*).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so ist das *orthogonale Komplement* $W^{\perp}$ von $W \subset V$ in V gegeben durch $W^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp w \, \forall w \in W\}$.

b) Gilt $(Ax|x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, so ist

$$\mathrm{Bild}(A) \perp \mathrm{Kern}(A).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so sind zwei Unterräume $W, X \subset V$ orthogonal, $W \perp X$, genau dann, wenn für alle $w \in W$ und $x \in X$ gilt $w \perp x$.

Aufgabe 2 (Übung)

Es sei $V = P[-1,1]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[-1,1]$ und $p_m \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1,1]$. Ferner sei die Abbildung $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(p|q) = \int_{-1}^{1} \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y$$

für alle $p, q \in V$. Zeigen Sie, dass durch $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V gegeben ist und wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $(\cdot|\cdot)$ auf $\{p_0, p_1, p_2\}$ an.

Aufgabe 3 (Übung)

Sei V ein $\mathbb{K}$- Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren $v, w, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \Big| \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \, (u_i|v_j) \, .$$

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V. Beweisen Sie die Formeln

a) $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} (v|e_i) \, \overline{(w|e_i)}$.

b) $(v|v) = \sum_{i=1}^{n} |(v|e_i)|^2$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 4 (Tutorium)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Seien $v_1, \ldots, v_n$ beliebige Vektoren aus V. Dann sind $v_1, \ldots, v_n, 0$ linear abhängig.

b) Sind $x, y \in V$ linear unabhängig und sind $x, z \in V$ linear unabhängig, so sind auch y, z linear unabhängig.

c) Sind $x, y, z \in V$ linear abhängig, so existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mit $z = \alpha x + \beta y$.

d) Ist $x \in V$ und gilt $(x|y) = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.

e) Es seien $x_1, \ldots, x_n, y \in V$. Ist $0 \neq y$ orthogonal zu jedem Vektor aus $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$, so folgt $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \neq V$.

Aufgabe 5 (Tutorium)

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion Px von x auf U, sowie den Abstand $d(x, U) = \min_{y \in U} \|x - y\|$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie **Aufgabe 2**, wenn die dort gegebene Abbildung $(\cdot|\cdot)$ durch $(\cdot|\cdot)_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $(p|q)_2 = \int_{-1}^{1} p(y)q(y)\,\mathrm{d}y$ ersetzt wird.

Aufgabe 6 (Tutorium)
Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass U versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.