Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.

SS2017
28.04.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt

$$\mathrm{Bild}(A)^\perp = \mathrm{Kern}(A^*).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so ist das *orthogonale Komplement* $W^\perp$ von $W \subset V$ in V gegeben durch $W^\perp = \{v \in V \mid v \perp w \,\forall w \in W\}$.

b) Gilt $(Ax|x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, so ist

$$\mathrm{Bild}(A) \perp \mathrm{Kern}(A).$$

Hinweis: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so sind zwei Unterräume $W, X \subset V$ orthogonal, $W \perp X$, genau dann, wenn für alle $w \in W$ und $x \in X$ gilt $w \perp x$.

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen zunächst, dass in jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum V für alle $x \in V$

$$\forall y \in V : (x|y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

gilt.
Beweis. $\Rightarrow$: Wähle $y = x$, dann ist $(x|x) = 0$. Das ist nach Eigenschaft (S3) (vgl. Abschnitt 16.1 der Vorlesung) nur für $x = 0$ möglich.
$\Leftarrow$: Sei $y \in V$ beliebig. Es gilt $(0|y) = (y - y|y) = (y|y) - (y|y) = 0$. $\square$
Nun gilt:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Bild}(A)^\perp &\Leftrightarrow \forall z \in \mathrm{Bild}(A) : (x|z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{K}^n : (x|Ay) = 0 \\ &\overset{\text{Abschnitt 16.5}}{\Leftrightarrow} \forall y \in \mathbb{K}^n : (A^*x|y) = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nach Obigem äquivalent zu $A^*x = 0$. Dies ist wiederum äquivalent zu $x \in \mathrm{Kern}(A^*)$.

b) Seien $y \in \text{Bild}(A)$ und $z \in \text{Kern}(A)$ beliebig. Zu zeigen ist $(y|z) = 0$. Da $y \in \text{Bild}(A)$, existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = y$. Es gilt

$$\begin{aligned}(y|z) &= (Ax|z) = (Ax + 0|z) \overset{z\in\text{Kern}(A)}{=} (Ax + Az|z) = (A(x+z)|(x+z) - x) \\ &= (A(x+z)|(x+z)) - (A(x+z)|x) \overset{\text{Voraus.}}{=} -(Ax + Az|x) \overset{z\in\text{Kern}(A)}{=} -(Ax|x) \overset{\text{Voraus.}}{=} 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Es sei $V = P[-1,1]$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen auf $[-1,1]$ und $p_m \in V$ definiert durch

$$p_m(x) = x^m$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1,1]$. Ferner sei die Abbildung $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(p|q) = \int_{-1}^{1} \frac{p(y)q(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}y$$

für alle $p, q \in V$. Zeigen Sie, dass durch $(\cdot|\cdot)$ ein Skalarprodukt auf V gegeben ist und wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich $(\cdot|\cdot)$ auf $\{p_0, p_1, p_2\}$ an.

Lösungsvorschlag

Wir zeigen zunächst, dass $(\cdot|\cdot)$ wohldefiniert ist. Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}|(p_m|p_n)| &\leqslant \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}y = \left[\lim_{b\to-1+} \int_b^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x + \lim_{a\to1-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}y\right] \\ &\overset{x=-y}{=} \left[\lim_{b\to1-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}t + \lim_{a\to1-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}y\right] = 2 \lim_{a\to1-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}y \\ &= 2 \lim_{a\to1-} \left[\arcsin(y)\right]_{y=0}^{y=a} = 2 \lim_{a\to1-} \arcsin(a) = \pi\end{aligned}$$

und das uneigentliche Integal $(p_m|p_n) = \int_{-1}^{1} \frac{x^{m+n}}{\sqrt{1-y^2}}\, \mathrm{d}y$ ist nach dem Majorantenkriterium konvergent. Da jedes Element $p \in V$ endliche Linearkombination der p_m ist, folgt aus der Linearität des Integrals, dass auch $(p|q)$ für beliebige $p, q \in V$ absolut konvergent, und damit endlich, ist.

Die Symmetrie (S1) der Abbildung ist sofort klar, ebenso wie die Linearität (S2), die aus der Linearität des Integrals folgt. Die Positivität (S3) folgt aus folgender Aussage, da der Integrand in $(p|p)$ positiv und nicht konstant Null ist, wenn p nicht das Nullpolynom ist:

<u>Behauptung:</u> Ist $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Dazu nehmen wir an, dass $f(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Sei zunächst $x_0 \in (a,b)$. Dann existiert wegen der Stetigkeit von f ein $\min\{x_0 - a, b - x_0\} > \varepsilon > 0$, sodass $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Aus der Monotonie des Integrals erhalten wir damit

$$\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x)|\, \mathrm{d}x > 2\varepsilon \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Sei nun o.B.d.A. $x_0 = a$. Wieder erhalten wir aus der Stetigkeit von f die Existenz eines $b - a > \varepsilon > 0$ sodass $|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}$ für alle $x \in [a, a+\varepsilon)$. Analog zu obiger Rechnung erhalten wir

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \geq \int_a^{a+\varepsilon} |f(x)| \, \mathrm{d}x > \varepsilon \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

und es folgt die Behauptung. $\square$

Nun verwenden wir die Notation aus Abschnitt 16.4. Es gilt

$$(p_0|p_0) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y \overset{\text{s.o.}}{=} \pi.$$

Also ist $b_0(x) = \frac{p_0(x)}{(p_0|p_0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für alle $x \in [-1, 1]$.
Ferner ist

$$(p_1|b_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y.$$

Nach der ersten Rechnung dieser Aufgabe konvergiert das uneigentliche Integral in $(p_1|b_0)$ nach dem Majorantenkriterium. Da der Integrand punktsymmetrisch ist, gilt $(p_1|b_0) = 0$.
Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
(p_1|p_1) &= \int_{-1}^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y = \lim_{b \to -1+} \int_b^0 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x + \lim_{a \to 1-} \int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y \\
&\overset{x=-y}{=} 2 \lim_{a \to 1-} \int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2 \lim_{a \to 1-} \int_0^{\arcsin(a)} \frac{\sin^2(t) \overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}} \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \lim_{a \to 1-} \int_0^{\arcsin(a)} \sin^2(t) \, \mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \, \mathrm{d}t = [t - \sin(t)\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also sind

$$c_1(x) = p_1(x) - (p_1|b_0)\, b_0(x) = x$$

und

$$b_1(x) = \frac{c_1(x)}{(p_1|p_1)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x$$

für alle $x \in [-1, 1]$.
Weiter sind

$$(p_2|b_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (p_1|p_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und

$$(p_2|b_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{y^3}{\sqrt{1-y^2}} \, \mathrm{d}y.$$

Wie bei $(p_1|b_0)$ sieht man, dass $(p_2|b_1) = 0$ gilt.
Für alle $x \in [-1, 1]$ gilt also

$$c_2(x) = p_2(x) - (p_2|b_0)\, b_0(x) - (p_2|b_1)\, b_1(x) = x^2 - \frac{1}{2}.$$

Des Weiteren haben wir

$$
\begin{aligned}
(c_2|c_2) &= \int_{-1}^{1} \frac{\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - (p_1|p_1) + \frac{1}{4}(p_0|p_0) = \int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y - \frac{\pi}{4},
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y &= \lim_{b\to -1+} \int_{b}^{0} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y + \lim_{a\to 1-} \int_{0}^{a} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{x=-y}{=} 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{a} \frac{y^4}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos(t)}{\overset{y=\sin(t)}{=}} 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{\arcsin(a)} \frac{\sin^4(t)\overbrace{\cos(t)}^{>0}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\lim_{a\to 1-} \int_{0}^{\arcsin(a)} \sin^4(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{=} 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Eine Stammfunktion zu $\sin^4$ lässt sich mit dem *Phönix-aus-der-Asche-Trick* berechnen:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4(t)\,\mathrm{d}t &= \int \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin^3(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int \cos^2(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int (1-\sin^2(t))\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int \sin^2(t))\,\mathrm{d}t - 3\int \sin^4(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{3}{2}(t-\sin(t)\cos(t)) - \cos(t)\sin^3(t)\right] - 3\int \sin^4(t)\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int \sin^4(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{3}{8}t - \cos(t)\left(\frac{\sin^3(t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{8}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8} \text{ und } (c_2|c_2)_1 = \frac{\pi}{8}.
$$

Somit ist $b_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2-1)$ für alle $x \in [-1,1]$.

Aufgabe 3:

Sei V ein $\mathbb{K}$- Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Weiter seien Vektoren $v, w, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$
\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j}\,(u_i|v_j)\,.
$$

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V. Beweisen Sie die Formeln

a) $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} (v|e_i)\,\overline{(w|e_i)}$.

b) $(v|v) = \sum_{i=1}^{n} |(v|e_i)|^2$.

Lösungsvorschlag

Durch die Eigenschaften des Skalarprodukts ist die erste Formel leicht einzusehen, den rigorosen Beweis liefern wir durch Induktion. Wir zeigen zunächst, dass für $m \in \mathbb{N}$ und $u \in V$ beliebig

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i | u \right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(u_i | u \right).$$

Induktionsanfang (m=1): Nach (S2) ist $(\alpha_1 u_1 | u) = \alpha_1 (u_1 | u)$ und auf beiden Seiten der Gleichung steht exakt derselbe Ausdruck.
Induktionsschritt: Die Formel gelte für ein $m \in \mathbb{N}$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i u_i | u \right) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \alpha_{m+1} u_{m+1} | u \right) \overset{(S2)}{=} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i | u \right) + \alpha_{m+1} \left(u_{m+1} | u \right) \\ &\overset{IV}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(u_i | u \right) + \alpha_{m+1} \left(u_{m+1} | u \right) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \left(u_i | u \right). \end{aligned}$$

Nun folgt mit dieser Formel und (S1), dass

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i | \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(u_i | \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right) \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j | u_i \right)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(v_j | u_i \right)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \overline{\left(v_j | u_i \right)} \overset{(S1)}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \left(u_i | v_j \right). \end{aligned}$$

Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nun eine Orthonormalbasis von V, so lassen sich $v, w \in V$ schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^{n} \left(v | e_i \right) e_i, \qquad w = \sum_{j=1}^{n} \left(w | e_j \right) e_j.$$

Mithilfe der bewiesenen Formel ergibt sich nun

a)

$$\begin{aligned} (v|w) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(v | e_i \right) e_i | \sum_{j=1}^{n} \left(w | e_j \right) e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(v | e_i \right) \overline{\left(w | e_j \right)} \underbrace{\left(e_i | e_j \right)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \left(v | e_i \right) \overline{\left(w | e_i \right)}, \end{aligned}$$

b)

$$(v|v) \overset{\mathbf{a)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(v | e_i \right) \overline{\left(v | e_i \right)} = \sum_{i=1}^{n} \left| \left(v | e_i \right) \right|^2.$$

Aufgabe 4:

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Seien $v_1, \ldots, v_n$ beliebige Vektoren aus V. Dann sind $v_1, \ldots, v_n, 0$ linear abhängig.

b) Sind $x, y \in V$ linear unabhängig und sind $x, z \in V$ linear unabhängig, so sind auch y, z linear unabhängig.

c) Sind $x, y, z \in V$ linear abhängig, so existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mit $z = \alpha x + \beta y$.

d) Ist $x \in V$ und gilt $(x|y) = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.

e) Es seien $x_1, \ldots, x_n, y \in V$. Ist $0 \neq y$ orthogonal zu jedem Vektor aus $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$, so folgt $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \neq V$.

Lösungsvorschlag

a) Die Aussage ist wahr, denn der Nullvektor $\mathbf{0}$ lässt sich als nichttriviale Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n, \mathbf{0}$ darstellen, z.B. durch $\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + \ldots 0 \cdot v_n + 1 \cdot \mathbf{0}$. Hier haben wir zur Verdeutlichung $\mathbf{0}$ für den Nullvektor und 0 für die Zahl Null geschrieben.

b) Die Aussage ist falsch: Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$. Dort sind $x := e_1 = (1, 0)$ und $y := e_2 = (0, 1)$ linear unabhängig, und genauso x und $z := 2e_2 = (0, 2)$. Die Vektoren y und z sind jedoch nicht linear unabhängig, denn $0 = 2y - z$ ist eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

c) Die Aussage ist falsch: Wähle z.B. $V = \mathbb{R}^3$ mit $x = e_2 = (0, 1, 0), y = 2e_2 = (0, 2, 0)$ und $z = e_1 = (1, 0, 0)$.

d) Die Aussage ist wahr: Da die Aussage für alle $y \in V$ gilt, also insbesondere auch für $y = x$, haben wir $(x|x) = 0$. Nach Eigenschaft (S3) des Skalarproduktes, kann dies aber nur für $x = 0$ erfüllt sein.

e) Die Aussage ist wahr: Wäre nämlich $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = V$, so hätten wir $(y|x) = 0$ für alle $x \in V$. Aus **d)** würde dann unmittelbar $y = 0$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung $y \neq 0$.

Aufgabe 5:

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^5$, die Orthogonalprojektion Px von x auf U, sowie den Abstand $d(x, U) = \min_{y \in U} \|x - y\|$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie **Aufgabe 2**, wenn die dort gegebene Abbildung $(\cdot|\cdot)$ durch $(\cdot|\cdot)_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $(p|q)_2 = \int_{-1}^{1} p(y)q(y)\, \mathrm{d}y$ ersetzt wird.

Lösungsvorschlag

a) Wir berechnen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens (vgl Abschnitt 16.4 der Vorlesung) ein Orthonormalsystem $B = \{b_1; b_2; b_3\}$, welches U erzeugt, wie folgt:

$$\begin{aligned} & & b_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ c_2 &= v_2 - (v_2|b_1)b_1 & b_2 &= \frac{c_2}{\|c_2\|} \\ c_3 &= v_3 - (v_3|b_1)b_1 - (v_3|b_2)b_2 & b_3 &= \frac{c_3}{\|c_3\|} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$(v_2|b_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0) = \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow c_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\|c_2\| = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(v_3|b_1) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ (v_3|b_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow c_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$$\|c_3\| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Nach Abschnitt 16.7 der Vorlesung ist die Orthogonalprojektion Px gegeben durch

$$Px = (x|b_1)b_1 + (x|b_2)b_2 + (x|b_3)b_3.$$

Wir berechnen

$$(x|b_1) = \frac{7}{\sqrt{3}}, \qquad (x|b_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad (x|b_3) = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Es folgt

$$Px = \frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix}.$$

Schließlich ist nach Abschnitt 16.7 der Vorlesung

$$d(x,U) = \min_{y\in U} \|x-y\| = \|x-Px\|\,.$$

Wir berechnen

$$x - Px = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\5\\8\\13\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\15\end{pmatrix}, \qquad \|x-Px\| = \frac{\sqrt{228}}{3} \approx 5,03.$$

b) Wieder mit der Notation aus dem Abschnitt 16.4 der Vorlesung gilt

$$(p_0|p_0)_2 = \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}y = 2.$$

Also ist $b_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für alle $x \in [-1,1]$. Ferner sind

$$(p_1|b_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} y \,\mathrm{d}y = 0$$

und

$$(p_1|p_1)_2 = \int_{-1}^{1} y^2 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2}{3}.$$

Also ist $b_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ für alle $x \in [-1,1]$. Weiter haben wir

$$(p_2|b_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{und} \qquad (p_2|b_1)_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} y^3 \,\mathrm{d}y = 0.$$

Also ist

$$c_2(x) = p_2(x) - (p_2|b_0)_2\, b_0(x) - (p_2|b_1)_2\, b_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

für alle $x \in [-1,1]$ und wegen

$$(c_2|c_2)_2 = \int_{-1}^{1} \left(y^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^4 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9} \,\mathrm{d}y = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

ist $b_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ für alle $x \in [-1,1]$.

Aufgabe 6:

Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass U versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

Lösungsvorschlag

Für $i = 1, 2, 3$ seien $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ und

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & a_i & b_i \\ 0 & 1 & c_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U.$$

Zunächst muss gewährleistet sein, dass die Matrixmultiplikation zwei Elemente aus U wieder auf ein Element aus U abbildet. Es gilt

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 + a_1 c_2 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U.$$

Für die Assoziativität (G1) berufen wir uns auf **Abschnitt 15.15** aus **HM1**, der besagt, dass die Matrixmultiplikation assoziativ ist. Wir können es aber auch nachrechnen und erhalten

$$(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 + a_1 c_2 + a_1 c_3 + a_2 c_3 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 + c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3).$$

Das neutrale Element (G2) ist gegeben durch die Einheitsmatrix, welche in U liegt. Daran, dass jedes Element in U in seiner Zeilenstufenform vorliegt, erkennen wir, dass dazu ein Inverses bezüglich der Matrixmultiplikation existiert. Es bleibt zu zeigen, dass dieses Inverse auch in U liegt. Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

womit die rechte Seite, das Inverse der Anfangsmatrix, ein Element aus U ist.

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2017s/