Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.

SS2017
03.05.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von A, indem Sie

a) die Regel von Sarrus verwenden.

b) nach der ersten Zeile entwickeln.

c) durch Spaltenumformungen einen Einheitsvektor erzeugen und nach diesem entwickeln.

Aufgabe 8 (Übung)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{rl} (\alpha-2)\cdot x + \quad (\alpha-1)\cdot y - \quad (\alpha-1)\cdot z = & 0 \\ (6-3\alpha)\cdot x + \ (\alpha^2-1)\cdot y + \quad (\alpha-1)\cdot z = & 0 \\ (\alpha^2-\alpha-2)\cdot x + \alpha(\alpha-1)\cdot y - \alpha(\alpha-1)\cdot z = & \alpha - 1. \end{array} \right.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar? Finden Sie für diese α die Lösung x mittels der Cramerschen Regel.

Aufgabe 9 (Übung)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

a) die *Graßmann-Identität*

$$a \times (b \times c) = b(a|c) - c(a|b),$$

b) die *Jacobi-Identität*

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0,$$

c) die *Lagrange-Identität*

$$(a \times b\, | c \times d) = (a|c)(b|d) - (b|c)(a|d),$$

d) sowie, dass die Länge $\|a \times b\|$ des Kreuzproduktes von a und b gleich dem Flächeninhalt $A(a, b)$ des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 10 (Tutorium)

a) *Satz von Jordan-von Neumann.* Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass die Norm auf V genau dann von einem Skalarprodukt induziert wird (d.h. es gibt ein Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf V mit $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ für alle $x \in V$), wenn die Norm die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in V$ erfüllt.

b) Sei $V = C[0,1]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

für $f \in V$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Jordan-von Neumann, dass $\|\cdot\|_\infty$ auf V nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

Aufgabe 11 (Tutorium)

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$.

b) Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1}A^TA^2A^TA^{-1}) = \det(A)^2$.

c) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

d) $\det(\det(A)B) = \det(A)^n \det(B)$.

Aufgabe 12 (Tutorium)

a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C_α regulär?

b) Sei $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad Ta = a \times b,$$

(i) die Adjungierte T^*,

(ii) $\mathrm{Kern}(T)$,

(iii) $\mathrm{Bild}(T)$.

Hinweis: Verwenden Sie **Aufgabe 1 a)**.