Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.

SS2017
05.05.2017

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

**Aufgabe 7: (Übung)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von $A$, indem Sie

a) die Regel von Sarrus verwenden.

b) nach der ersten Zeile entwickeln.

c) durch Spaltenumformungen einen Einheitsvektor erzeugen und nach diesem entwickeln.

### Lösungsvorschlag

a) Die Regel von Sarrus liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot (-1) \\ &= -4 + 2 + 4 - 4 - 4 + 2 = -4. \end{aligned}$$

b) Entwickeln nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot ((-2) - (-1)) - 2 \cdot (2 - 1) + 4 \cdot (1 - 1) = -2 - 2 = -4. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. Z.}}{=} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

**Aufgabe 8: (Übung)**
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b_\alpha$ gegeben durch

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (\alpha-2)\cdot x + & (\alpha-1)\cdot y - & (\alpha-1)\cdot z = & 0 \\ (6-3\alpha)\cdot x + & (\alpha^2-1)\cdot y + & (\alpha-1)\cdot z = & 0 \\ (\alpha^2-\alpha-2)\cdot x + & \alpha(\alpha-1)\cdot y - & \alpha(\alpha-1)\cdot z = & \alpha-1. \end{array}\right.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix $A_\alpha$.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar? Finden Sie für diese $\alpha$ die Lösung $x$ mittels der Cramerschen Regel.

## Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A_\alpha) &= \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & (\alpha+1)(\alpha-1) & (\alpha-1) \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Entw. 1. Z.}}{=} (-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot(\alpha-2)(\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & \alpha+2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2).
\end{aligned}$$

Die Matrix $A_\alpha$ ist also invertierbar für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

b) Cramersche Regel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, $A = (a_1, \dots, a_n)$, so sind die Komponenten der Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ (mit $b \in \mathbb{K}^n$) gegeben durch

$$x_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Um die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems zu berechnen, benötigen wir also die folgenden Determinanten

$$D_1 := \begin{vmatrix} 0 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 0 & (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = (\alpha-1)\begin{vmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^3(\alpha+2).$$

$$D_2 := \begin{vmatrix} \alpha-2 & 0 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & 0 & \alpha-1 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) \end{vmatrix} = -(\alpha-1)\begin{vmatrix} \alpha-2 & -(\alpha-1) \\ -3(\alpha-2) & \alpha-1 \end{vmatrix} = 2(\alpha-1)^2(\alpha-2).$$

$$D_3 := \begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & 0 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) & 0 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)\begin{vmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) \end{vmatrix}$$
$$= (\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4).$$

Für die Komponenten des Lösungsvektors folgt also

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^3(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \\ x_2 &= \frac{D_2}{\det(A_\alpha)} = \frac{2(\alpha-1)^2(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{2}{\alpha+2} \\ x_3 &= \frac{D_3}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha+4}{\alpha+2}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 9: (Übung)**
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

a) die *Graßmann-Identität*

$$a \times (b \times c) = b(a|c) - c(a|b),$$

b) die *Jacobi-Identität*

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0,$$

c) die *Lagrange-Identität*

$$(a \times b\,| c \times d) = (a|c)(b|d) - (b|c)(a|d),$$

d) sowie, dass die Länge $\|a \times b\|$ des Kreuzproduktes von $a$ und $b$ gleich dem Flächeninhalt $A(a, b)$ des von $a$ und $b$ aufgespannten Parallelogramms ist.

## Lösungsvorschlag

a) Seien

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen „zu Fuß“ nach

$$\begin{aligned}
a \times (b \times c) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + b_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + b_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = b(a|c) - c(a|b).
\end{aligned}$$

b) Die Aussage folgt direkt aus a)

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) \overset{\text{a)}}{=} b(a|c) - c(a|b) + c(b|a) - a(b|c) + a(c|b) - b(c|a) = 0.$$

c) Es gilt nach Abschnitt 17.14 der Vorlesung

$$(a \times b \,|c \times d) = \det(a, b, c \times d) \overset{17.2}{=} \det(b, c \times d, a) = (b \times (c \times d)|a).$$

Mit der Graßmann-Identität aus a) folgt

$$(a \times b \,|c \times d) = (b \times (c \times d)|a) = (c(b|d) - d(b|c)|a) = (a|c)(b|d) - (a|d)(b|c).$$

d) Für $a = c$ und $b = d$ erhalten wir als Spezialfall der Lagrange-Identität

$$\|a \times b\|^2 = (a \times b|a \times b) = \|a\|^2 \, \|b\|^2 - (a|b)^2 \, .$$

Wegen

$$(a|b) = \|a\| \, \|b\| \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad A(a, b) = \|a\| \, \|b\| \sin(\varphi),$$

wobei $\varphi$ der Winkel zwischen $a$ und $b$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|a \times b\|^2 &= \|a\|^2 \, \|b\|^2 \, (1 - \cos(\varphi)^2) \\
&= \|a\|^2 \, \|b\|^2 \sin(\varphi)^2 = A(a, b)^2.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 10: (Tutorium)

a) *Satz von Jordan-von Neumann.* Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass die Norm auf $V$ genau dann von einem Skalarprodukt induziert wird (d.h. es gibt ein Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ auf $V$ mit $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ für alle $x \in V$), wenn die Norm die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in V$ erfüllt.

b) Sei $V = C[0,1]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

für $f \in V$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Jordan-von Neumann, dass $\|\cdot\|_\infty$ auf $V$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

## Lösungsvorschlag

a) **$\Rightarrow$:** Wir zeigen: Wird die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalaprprodukt $(\cdot|\cdot)$ induziert, so gilt die Parallelogrammgleichung. Durch Nachrechnen unter der Verwendung der Linearität erhält man

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y|x+y) + (x-y|x-y)\\ &= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) + (x|x) - (x|y) - (y|x) + (y|y)\\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

**$\Leftarrow$:** Wir zeigen zunächst: Gilt die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|$, so ist für alle $x, y, z \in V$

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 . \tag{1}$$

*Beweis.* Unter der Verwendung der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned}&\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2\\ &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\\ &- (\|x+z\|^2 + \|y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2)\\ &+ (\|x-z\|^2 + \|y\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2)\\ &= \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\\ &- \frac{1}{2}(\|x+y+z\|^2 + + \|x-y+z\|^2 + \|x+y+z\|^2) + \|-x+y+z\|^2)\\ &+ \frac{1}{2}(\|x+y-z\|^2 + \|x-y-z\|^2 + \|x+y-z\|^2 + \|-x+y-z\|^2) = 0.\end{aligned}$$

□

Im nächsten Schritt zeigen wir: Gilt die Parallelogrammgleichung für $\|\cdot\|$, so ist für alle $x, z \in V, q \in \mathbb{Q}$

$$\|qx+z\|^2 - \|qx-z\|^2 = q(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2). \tag{2}$$

*Beweis.* Aus (1) folgt die Gültigkeit von (2) für $q = 2$, wenn man $x = y$ wählt. Induktiv folgt nun unter Verwendung von (1) die Gültigkeit von (2) für alle $q \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\begin{aligned}\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 &= \left\|n\cdot n^{-1}x + z\right\|^2 - \left\|n\cdot n^{-1}x - z\right\|^2\\ &= n(\left\|n^{-1}x+z\right\|^2 - \left\|n^{-1}x - z\right\|^2)\end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$, gilt die Gleichung für alle $q \in \mathbb{Q}_+$. Weiter ist mit (1) für $q \in \mathbb{Q}_+$

$$\begin{aligned}0 &= \|(q-q)x+z\|^2 - \|(q-q)x-z\|\\ &= \|qx+z\|^2 - \|qx-z\|^2 + \|-qx+z\|^2 - \|-qx-z\|^2\\ &= q(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) + (\|-qx+z\|^2 - \|-qx-z\|^2),\end{aligned}$$

woraus nun die Behauptung für $q \in \mathbb{Q}$ folgt. $\square$

Nun sind wir so weit, dass wir zeigen können, dass $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert wird. Wir setzen

$$(x|y) := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Dann ist $(x|x) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2$. Wir müssen überprüfen, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt definiert. Symmetrie ist aus der Definition sofort ersichtlich. Die Positivität von $(\cdot|\cdot)$ folgt aus der Positivität der Norm. Es bleibt die Linearität in der ersten Komponente zu zeigen. Die Additivität folgt aus (1), die Homogenität folgt für $\lambda \in \mathbb{Q}$ aus (2). Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Wegen der Stetigkeit der Norm gilt

$$(\lambda x|y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda_n x|y) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n (x|y) = \lambda (x|y),$$

und $(\cdot|\cdot)$ ist das gesuchte Skalarprodukt.

b) Wir zeigen, dass $\|\cdot\|_\infty$ die Parallelogrammgleichung **nicht** erfüllt. Daraus folgt durch Negation der $\Rightarrow$ Richtung des Satzes von Jordan-von Neumann direkt, dass $\|\cdot\|_\infty$ auf $C[0,1]$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.
Es reicht zwei Funktionen $f, g \in C[0,1]$ zu finden, die die Parallelogrammgleichung nicht erfüllen. Wähle zum Beispiel $f(x) = x$ und $g(x) = 1-x$. Dann gilt

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = \|1\|_\infty^2 + \|2x-1\|_\infty^2 = 1+1 = 2.$$

Aber

$$2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) = 2(\|x\|_\infty^2 + \|1-x\|_\infty^2) = 2(1+1) = 4 \neq 2.$$

## Aufgabe 11: (Tutorium)

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$.

b) Ist $A$ regulär, so gilt $\det(A^{-1}A^TA^2A^TA^{-1}) = \det(A)^2$.

c) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

d) $\det(\det(A)B) = \det(A)^n \det(B)$.

## Lösungsvorschlag

a) **Falsch,** außer für $n = 1$. Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. (Verwende $n$-mal (D2).)

b) **Wahr,** denn für eine reguläre Matrix $A$ gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz 17.9

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}A^TA^2A^TA^{-1}) &= \det(A^{-1})\det(A^T)\det(A^2)\det(A^T)\det(A^{-1})\\ &= \frac{1}{\det(A)}\det(A)\det(A)^2\det(A)\frac{1}{\det(A)}\\ &= \det(A)^2.\end{aligned}$$

c) **Falsch,** außer für $n = 1$ oder spezielle Matrizen $A$ und $B$, wie etwa $A = 0$. Zum Beispiel ist für die Identität $I \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\det(I + I) = \det(2I) = 2^n \det(I) = 2^n \neq 2 = \det(I) + \det(I)$$

für $n \neq 1$.

d) **Wahr,** denn $\det(A)$ ist ja nur ein Skalar. Vergleiche Aufgabenteil a).

## Aufgabe 12: (Tutorium)

a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $C_\alpha$ regulär?

b) Sei $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fest. Berechnen Sie für die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad Ta = a \times b,$$

(i) die Adjungierte $T^*$,

(ii) $\mathrm{Kern}(T)$,

(iii) $\mathrm{Bild}(T)$.

*Hinweis:* Verwenden Sie **Aufgabe 1 a)**.

## Lösungsvorschlag

a) Mit den Rechenregeln für Determinanten folgt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Laut Vorlesung ist die Determinante einer oberen rechten Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det(A) = -6$. Weiter gilt

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 2. Z.}}{=} (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 18 & 11 \\ -1 & 7 & 3 \\ 0 & 27 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 1. S.}}{=} (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 18 & 11 \\ 27 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 54 - 99 = -45.$$

Zuletzt gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 2. S.}}{=} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha-4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 1. Z.}}{=} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha-4 \end{vmatrix} = (\alpha-4) - 1 = \alpha - 5,$$

womit $C$ genau dann regulär ist, wenn $\alpha \neq 5$ gilt.

b) Seien $a, c \in \mathbb{R}^3$.

(i) Es gilt

$$(Ta|c) = (a \times b|c) \overset{\textbf{17.14}}{=} \det(a,b,c) \overset{\textbf{17.2}}{=} -\det(c,b,a) \overset{\textbf{17.14}}{=} -(c \times b|a) \overset{\textbf{(S1)}}{=} (a|-Tc) = (a|T^*c).$$

Also ist $T^* = -T$.

(ii) Nach **17.13 (4)** gilt für alle $a \in \mathbb{R}^3$

$$0 = Ta = a \times b \Leftrightarrow a, b \text{ linear abhängig},$$

also ist $\mathrm{Kern}(T) = \mathrm{lin}\,\{b\}$.

(iii) Nach **Aufgabe 1 a)** gilt $\mathrm{Bild}(T) = \mathrm{Kern}(T^*)^\perp$. Mit (i) und (ii) folgt

$$\mathrm{Bild}(T) = \mathrm{Kern}(T)^\perp = \mathrm{lin}\,\{b\}^\perp = \left\{a \in \mathbb{R}^3 : (a|b) = 0\right\}.$$