Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
10.05.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix S an, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $W^2 = A$ gilt.

Aufgabe 14 (Übung)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 17 & 16 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie alle möglichen Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass A und B ähnlich sind.

Aufgabe 15 (Übung)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Man nennt A und B*simultan diagonalisierbar*, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, sodass sowohl $S^{-1}AS$, als auch $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt haben. Zeigen Sie

a) Sind A und B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

b) Gilt $AB = BA$ und haben überdies alle Eigenwerte von A algebraische Vielfachheit eins, so sind A und B simultan diagonalisierbar.

Man kann sogar allgemeiner zeigen, dass A und B simultan diagonalisierbar sind, falls $AB = BA$ gilt sowie A und B diagonalisierbar sind.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 16 (Tutorium) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so existiert ein reeller Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von A zum Eigenwert λ.

c) Sind $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A sowie $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B, so ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von AB.

d) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2.

e) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und n gerade/ungerade, so besitzt A mindestens einen reellen Eigenwert.

f) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so gilt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 17 (Tutorium)
Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und geben Sie eine orthogonale Matrix T an, sodass $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt hat.

b) Berechnen Sie B^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18 (Tutorium) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie jeweils die algebraische und geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte? Welche der Matrizen ist diagonalisierbar? Ermitteln Sie, falls möglich, reguläre Matrizen S_A bzw. S_B, sodass $S_A^{-1}AS_A$ bzw. $S_B^{-1}BS_B$ Diagonalgestalt hat.