Institut für Analysis SS2017
PD Dr. Peer Christian Kunstmann 17.05.2017
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Übung)

Seien $\mathcal{I}$ eine Indexmenge, $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B, A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ für $i \in \mathcal{I}$. Zeigen Sie

a) Sind A und B offen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A offen und B abgeschlossen, so ist auch $A \setminus B$ offen.

b) Sind A und B abgeschlossen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A abgeschlossen und B offen, so ist auch $A \setminus B$ abgeschlossen.

c) Sind alle A_i offen, so auch $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$. Sind alle A_i abgeschlossen, so auch $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$.

Aufgabe 20 (Übung)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die folgenden Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ jeweils auf Stetigkeit in $0 \in D$

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ (0, 1), & x = 0, \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2 y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy)) \sin(x+z)}{x^3}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0, \\ \frac{z}{2}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 21 (Übung)

a) Die Kurve $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in (-1, 1).$$

Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie die Länge $L(\gamma)$ und ggf. die Parametrisierung von γ nach Bogenlänge.

b) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y, z) = (xy^2 z^3 e^{xy^2 z^3}, x^2 e^y + \sin(x)).$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 22 (Tutorium)

a) Seien $\beta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen $A_\beta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf Definitheit, wobei

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2} & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\frac{\beta}{2} & \frac{4}{3}+\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = (b_{kl})_{k,l=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{mit} \quad b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit

(i) $M_1 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 5y^2 < 1\big\}$,

(ii) $M_2 := \big\{\big(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n^2}\big) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \{(0,0)\}$.

Aufgabe 23 (Tutorium)

Die Funktionen f, g und h seien für $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

und $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden stetig*, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \to g(0,0)$ für $r \to 0+$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Aufgabe 24 (Tutorium)

a) Die Kurve $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie die Länge $L(\gamma)$ und ggf. die Parametrisierung von γ nach Bogenlänge.

b) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktionen f und g mit

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $f(x,y) = (ye^x + x\sinh(y), y^4 + 3x^2\sin(y), 4y - x^3)$,

(ii) $g : (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ und $g(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$.