Institut für Analysis SS2017
PD Dr. Peer Christian Kunstmann 19.05.2017
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 19: (Übung)

Seien $\mathcal{I}$ eine Indexmenge, $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B, A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ für $i \in \mathcal{I}$. Zeigen Sie

a) Sind A und B offen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A offen und B abgeschlossen, so ist auch $A \setminus B$ offen.

b) Sind A und B abgeschlossen, so auch $A \cup B$ und $A \cap B$. Ist A abgeschlossen und B offen, so ist auch $A \setminus B$ abgeschlossen.

c) Sind alle A_i offen, so auch $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$. Sind alle A_i abgeschlossen, so auch $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$.

Lösungsvorschlag

a) Seien zunächst A und B offen sowie $x_0 \in A \cup B$. Dann ist $x_0 \in A$ oder $x_0 \in B$ und da beide Mengen offen sind, existiert ein $r > 0$ mit $U_r(x_0) \subseteq A \subseteq A \cup B$ oder $U_r(x_0) \subseteq B \subseteq A \cup B$, womit $A \cup B$ offen ist.
Seien nun A und B offen sowie $x_0 \in A \cap B$. Dann gilt $x_0 \in A$ und $x_0 \in B$, womit $r_1, r_2 > 0$ existieren mit $U_{r_1}(x_0) \subseteq A$ und $U_{r_2}(x_0) \subseteq B$. Mit $r := \min\{r_1, r_2\}$ gilt also $U_r(x_0) \subseteq A \cap B$, womit $A \cap B$ offen ist.
Sei nun A offen und B abgeschlossen. Dann ist per Definition $B^c := \mathbb{R}^n \setminus B$ offen. Nach HM 1 gilt

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

und da wir eben bereits gezeigt haben, dass der Schnitt zweier offener Mengen offen ist, gilt dies insbesondere für $A \setminus B$.

b) Seien zunächst A und B abgeschlossen. Um zu zeigen, dass $A \cup B$ abgeschlossen ist, zeigen wir, dass $(A \cup B)^c$, das nach den DeMorganschen Regeln mit $A^c \cap B^c$ übereinstimmt, offen ist. Da A^c und B^c offen sind, folgt dies aus **a)**. Um die Abgeschlossenheit von $A \cap B$ zu zeigen, weisen wir die Offenheit von $(A \cap B)^c$ nach, das mit $A^c \cup B^c$ übereinstimmt. Die Offenheit davon folgt wieder mit **a)**.
Sei nun A abgeschlossen und B offen. Es gilt

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

und letztere Menge ist nach dem bereits gezeigten abgeschlossen, da A und B^c abgeschlossen sind.

c) Seien alle A_i offen und $x_0 \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$. Somit ist $x_0 \in A_{i_0}$ für mindestens ein $i_0 \in \mathcal{I}$, womit ein $r > 0$ existiert mit $U_r(x_0) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$. Damit ist $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ offen.
Seien nun alle A_i abgeschlossen, d.h., alle A_i^c offen. Es gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \in \left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I} : x \notin A_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathcal{I} : x \in A_i^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i^c.$$

Somit ist $\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i^c$, was nach dem obigen Ergebnis eine offene Menge its, da alle A_i^c offen sind. Also ist $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ per Definition abgeschlossen.

Aufgabe 20: (Übung)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die folgenden Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ jeweils auf Stetigkeit in $0 \in D$

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ (0,1), & x = 0, \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ (0,0), & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0, \\ \frac{z}{2}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0. \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) *Voraussetzung:* Es ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (0,1), & x = 0. \end{cases}$
Behauptung: f ist stetig in 0.
Beweis: Es gilt

$$\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x| \xrightarrow{x\to 0} 0$$

und $|x|^{x^2} = e^{x^2 \log(|x|)} \xrightarrow{x\to 0} 1$ wegen

$$\lim_{x\to 0} x^2 \log(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{x^{-2}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2} = 0.$$

Somit sind beide Komponenten der Funktion stetig in 0 (außerhalb von 0 ist dies klar). Damit ist f laut Vorlesung stetig in 0.

b) Es ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$
Behauptung: f ist in $(0,0)$ stetig.

Beweis: Es gilt wegen $(x-y)^2 \geqslant 0$, dass $2xy \leqslant x^2+y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Deshalb folgt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \left|\sin\left(xy^2 - x^2y\right)\right| = 2\left|\sin\left(xy^2 - x^2y\right)\right| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

Also ist

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

und es folgt, dass f in $(0,0)$ stetig ist.

c) *Voraussetzung:* Es ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Behauptung: f ist nicht stetig in $(0,0)$.
Beweis: Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ gilt

$$\|f(x,y) - f(0,0)\| = 1,$$

und damit ist f in $(0,0)$ nicht stetig.

d) *Voraussetzung:* Es ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0 \\ \frac{z}{2}, & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0 \end{cases}.$

Behauptung: f ist in $(0,0,0)$ nicht stetig.
Beweis: Es gilt, dass

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \neq 0\}}_{=:D_1} \ \dot{\cup} \ \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\}}_{=:D_2}.$$

Wir setzen $v^0 := (0,0,0)$. Wir zeigen, dass f in v^0 nicht stetig ist. v^0 ist ohne Zweifel ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^3$ und es gilt $f(v^0) = \frac{0}{2} = 0$. Für $(v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $v^{(k)} := (\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ gilt $v^{(k)} \in D_1$ für $k \in \mathbb{N}$ und $v^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} v^0$. Aber für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(v^{(k)}) = \frac{(1-\cos(\frac{1}{k^4}))\sin(\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k^9}} = \frac{(1-\cos(\frac{1}{k^4}))}{\frac{1}{k^8}} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = f(v^0).$$

Dies gilt wegen

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\sin(x^3+x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1,$$

was beides mittels der Regel von L'Hospital eingesehen werden kann. Alternativ betrachtet man im ersten Fall die Potenzreihe des Kosinus und schreibt den zweiten Bruch um als $\frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} \cdot \frac{x^3+x}{x} = \frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} \cdot (x^2+1)$.

Aufgabe 21: (Übung)

a) Die Kurve $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in (-1,1).$$

Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie die Länge $L(\gamma)$ und ggf. die Parametrisierung von γ nach Bogenlänge.

b) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) = (xy^2z^3e^{xy^2z^3}, x^2e^y + \sin(x)).$$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$$

für alle $t \in (-1,1)$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt

$$s(t) := \int_{-1}^{t} \|\gamma'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau = \sqrt{2}\,(\arcsin(t) - \arcsin(-1)) = \sqrt{2}\left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle $t \in [-1,1]$. Es ist also $L(\gamma) = s(1) = \sqrt{2}\pi$. Die Umkehrfunktion $t : [0, \sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}$ ist durch

$$t(s) = \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben. Die natürliche Parametrisierung von γ ist dann durch

$$\gamma \circ t(s) = \gamma\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, \sqrt{2}\pi]$ gegeben.

b) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= ((1 + xy^2z^3)y^2z^3e^{xy^2z^3}, 2xe^y + \cos(x)) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= (2xyz^3(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, x^2e^y) \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= (3xy^2z^2(1 + xy^2z^3)e^{xy^2z^3}, 0)
\end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 22: (Tutorium)

a) Seien $\beta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen $A_\beta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf Definitheit, wobei

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = (b_{kl})_{k,l=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{mit} \quad b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit

(i) $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 5y^2 < 1\}$,

(ii) $M_2 := \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n^2}\right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$.

Lösungsvorschlag

a) A_β: Wir bestimmen die Eigenwerte der Matrix A_β. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\chi_{A_\beta}(\lambda) = \det(A_\beta - I_3\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{7}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} - \lambda & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} - \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{7}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} - \lambda & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\beta + \lambda & \beta - \lambda \end{vmatrix} \overset{(D2)}{=} (\beta - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} + \frac{\beta}{2} - \lambda & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3} - \lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} - \lambda & \frac{4}{3} - \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (\beta - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} - \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$= (\beta - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ -2 + \lambda & 2 - \lambda \end{vmatrix} \overset{(D2)}{=} (\beta - \lambda)(2 - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{7}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\beta - \lambda)(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2-ten Zeile}}{\overset{\text{Entw. nach}}{=}} (\beta - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$$

Also ist $\operatorname{spec}(A_\beta) = \{\beta, 2, 3\}$. Nach der Charakterisierung der Definitheit im Abschnitt 18.9 der Vorlesung, ist A_β für $\beta < 0$ indefinit, für $\beta = 0$ positiv semidefinit und positiv definit für $\beta > 0$.

B: Klar: für $n = 1$ ist B positiv definit. Für $n \geq 2$ betrachte

$$\vec{e}_1^T B \vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

sowie

$$(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)^T B (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = (1, -1, 0, \cdots, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

Per Definition ist also B indefinit.

b) (i) Sei $(x_0, y_0) \in M_1$, d.h, $0 < x_0^2 + 5y_0^2 < 1$. Definiere $\alpha := \frac{1+x_0^2+5y_0^2}{2(x_0^2+5y_0^2)}$ und wähle

$$\delta := \min\left(\left\{\frac{|x_0|}{2}; \frac{|y_0|}{2}; (\sqrt{\alpha}-1)|x_0|; (\sqrt{\alpha}-1)|y_0|\right\}\right).$$

Für alle $(x, y) \in U_\delta((x_0, y_0)) \subseteq U_\delta(x_0) \times U_\delta(y_0)$ gilt

$$\begin{aligned}\underline{0 <}\frac{x_0^2+5y_0^2}{4} &\leqslant (|x_0|-\delta)^2 + 5(|y_0|-\delta)^2 < (|x_0|-|x-x_0|)^2 + 5(|y_0|-|y-y_0|)^2 \leqslant \underline{x^2+5y^2}\\ &\leqslant (|x_0|+|x-x_0|)^2 + 5(|y_0|+|y-y_0|)^2 < (|x_0|+\delta)^2 + 5(|y_0|+\delta)^2 \leqslant \alpha(x_0^2+5y_0^2)\\ &= \frac{1+x_0^2+5y_0^2}{2}\underline{< 1}.\end{aligned}$$

Damit ist M_1 offen. Andererseits ist M_1 nicht abgeschlossen. Betrachte dazu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = ((\frac{1}{2k}, 0))_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(\frac{1}{2k}, 0) \in M_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \notin M_1$. Also ist M_1 nicht abgeschlossen, nach der Charakterisierung abgeschlossener Mengen aus dem Abschnitt 19.2 der Vorlesung.

Anmerkung: Man kann auch mit der Abgeschlossenheit des Komplements

$$M_1^c \overset{(!)}{=} \{0\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x^2 + 5y^2 \geqslant 1\right\}$$

begründen, dass M_1 offen ist.

(ii) M_2 ist abgeschlossen: Sei $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine (in $\mathbb{R}^2$) gegen (x_0, y_0) konvergente Folge in M_2. Wir zeigen, dass auch der Grenzwert (x_0, y_0) in M_2 liegt.

Fall 1: Für alle $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $(x_k, y_k) \in U_\varepsilon(0, 0)$, d.h., $(0, 0)$ ist Häufungspunkt von $((x_k, y_k))_k$. Dann muss wegen der Konvergenz von $((x_k, y_k))_k$ der Punkt $(0, 0)$ auch der Grenzwert von $((x_k, y_k))_k$ sein. Also ist $(x_0, y_0) = (0, 0) \in M_2$.

Fall 2: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass ab einem gewissen Index k_0 alle (x_k, y_k), $k \geqslant k_0$, nicht in $U_\varepsilon(0, 0)$ liegen. D.h., $||(x_k, y_k)|| \geqslant \varepsilon > 0$ für alle $k \geqslant k_0$, also wegen der Stetigkeit der Norm auch $||(x_0, y_0)|| \geqslant \varepsilon > 0$. Also gilt $x_0 \neq 0$ oder $y_0 \neq 0$ und $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist nicht konstant 0. Damit gibt es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ derart, dass $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{n_k}, \frac{1}{2n_k^2}\right)$ gilt. Ist nun $x_0 \neq 0$, so folgt aus der Konvergenz von $\left(\frac{1}{n_k}, \frac{1}{2n_k^2}\right)$ in M_2

$$\frac{1}{x_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = \lim_{k\to\infty} n_k := n_0 \in \mathbb{N}.$$

Außerdem ist damit

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2n_k^2} = \frac{1}{2n_0^2},$$

d.h., $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{2n_0^2}\right) \in M_2$. Analog erhält man im Fall $y_0 \neq 0$, dass $(x_0, y_0) \in M_2$.

Auf der andere Seite ist M_2 nicht offen: Wähle die Folge $(x_k, y_k) := \left(1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right) \notin M_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$. D.h. insbesondere, dass aufgrund der Konvergenz für alle $\varepsilon > 0$ ein solches $k \in \mathbb{N}$ existiert, dass $U_\varepsilon(1, \frac{1}{2}) \ni (x_k, y_k) \notin M_2$. Also gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass $U_\varepsilon(1, \frac{1}{2}) \not\in M_2$.

Aufgabe 23: (Tutorium)
Die Funktionen f, g und h seien für $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

und $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt *längs jeder Geraden stetig*, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \to g(0,0)$ für $r \to 0+$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

Lösungsvorschlag

a) Klar: f ist stetig in jedem $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen. Sei $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k,y_k) \to (0,0)$ und $(x_k,y_k) \neq (0,0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt wegen $(x-y)^2 \geqslant 0$, dass $2xy \leqslant x^2+y^2$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$|f(x_k,y_k)| = \left|\frac{x_k y_k^2}{x_k^2+y_k^2}\right| \leqslant |y_k|\,\frac{x_k^2+y_k^2}{2(x_k^2+y_k^2)} = \frac{|y_k|}{2} \to 0 = f(0,0)$$

für $k \to \infty$. Damit ist f stetig in $(0,0)$.

b) Die Funktion g ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$g\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \not\to 0 = g(0,0)$$

für $k \to \infty$.
Sei nun $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig und $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Angenommen, $\cos(\varphi) = 0$. Dann ist $\sin(\varphi) \neq 0$ und

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi)+r^4\sin^4(\varphi)} = 0 \to 0 = g(0,0)$$

für $r \to 0+$. Ist $\cos(\varphi) \neq 0$, so ist trotzdem

$$g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \frac{r^3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi)+r^4\sin^4(\varphi)} = r\frac{\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)+r^2\sin^4(\varphi)} \to 0 = g(0,0)$$

für $r \to 0+$.

c) Die Funktion h ist unstetig in $(0,0)$, denn $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = 1 \not\to 0 = h(0,0)$$

für $k \to \infty$. Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \to \frac{0}{0 + \underbrace{(x-0)^2}_{>0}} = 0$$

für $y \to 0$. Ist $x = 0$, so ist $h(x,y) = 0 \to 0$ für $y \to 0$. Also gilt in der Tat $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt auch $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y) = h(0,0) = 0$.

Aufgabe 24: (Tutorium)

a) Die Kurve $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Ist γ eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie die Länge $L(\gamma)$ und ggf. die Parametrisierung von γ nach Bogenlänge.

b) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktionen f und g mit

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $f(x,y) = (ye^x + x\sinh(y), y^4 + 3x^2\sin(y), 4y - x^3)$,

(ii) $g : (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ und $g(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{4}{\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \neq 0$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Deshalb ist γ regulär. Ferner gilt:

$$s(t) := \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}t$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Es ist also $L(\gamma) = s(2\pi) = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$. Die natürliche Parameterisierung von γ ist durch

$$\gamma \circ t(s) = \gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}s\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}s\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}s\right) \\ \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}s \end{pmatrix}$$

für alle $s \in [0, 2\sqrt{\pi^2 + 4}]$ gegeben.

b) (i) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (ye^x + \sinh(y), 6x\sin(y), -3x^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (e^x + x\cosh(y), 4y^3 + 3x^2\cos(y), 4)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Anwendung der eindimensionalen Differentiationsregeln liefert

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi,\vartheta) = (\cos(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\varphi)\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$$
$$\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi,\vartheta) = (-r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), 0)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \vartheta}(r,\varphi,\vartheta) = (-r\cos(\varphi)\sin(\vartheta), -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta), r\cos(\vartheta))$$

für alle $(r,\varphi,\vartheta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.