Institut für Analysis SS2017
PD Dr. Peer Christian Kunstmann 24.05.2017
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar. Für die Richtungen $u = (1, 2)$ und $v = (-1, 1)$ gelte

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 2.$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0)$ für $w = (1, 1)$. Geben Sie die Richtung h mit $\|h\| = 1$ an, für die $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0)$ maximal wird.

Aufgabe 26 (Übung)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = (\operatorname{grad} f(0, 0)) \cdot v$? Ist f differenzierbar?

Aufgabe 27 (Übung)
Gegeben seien die Funktionen $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\} \to \mathbb{R}^3$ und $g : E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (\ln(xy), \cos(x^2 + y), e^x) \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = e^x + yz + \ln(z).$$

a) Berechnen Sie die Ableitungen f' und g'.

b) Berechnen Sie mithilfe der Kettenregel die Ableitung $(g \circ f)'$.

c) Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 28 (Tutorium) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g.

c) Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} g(0,0)) \cdot v$? Ist g differenzierbar?

Aufgabe 29 (Tutorium)
Gegeben seien die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) := (x^2, y^2), \qquad g(x,y) := (\sin(xy), e^{x+y}), \qquad h(x,y) := (e^x \cos(y), \sinh(x)).$$

a) Berechnen Sie die Ableitungen f', g', h'.

b) Berechnen Sie mithilfe der Kettenregel die Ableitungen $(g \circ f)'$ und $(h \circ g)'$.

c) Berechnen Sie die Ableitungen $(g \circ f)'$ und $(h \circ g)'$, indem Sie $g \circ f$ bzw. $h \circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.

Aufgabe 30 (Tutorium)
Sei $n \in \mathbb{N}, D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differentierbar in D. Für ein beliebiges $x \in D$ sei $f(x) = c \in \mathbb{R}$ und

$$N_c = \{x \in D : f(x) = c\}$$

die Niveaulinie von f zum Wert c.
Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x_0 \in N_c$ der Gradient von f in x_0 in diesem Punkt senkrecht auf N_c steht, d.h. es ist

$$\nabla f(x_0) \perp \tau_{x_0},$$

wobei τ_{x_0} ein Tangentialvektor an die Niveaulinie in x_0 ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-1,1) \to N_c$ entlang der Niveaulinie und nutzen Sie die Kettenregel.