Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 25: (Übung)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar. Für die Richtungen $u = (1, 2)$ und $v = (-1, 1)$ gelte

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 2.$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0)$ für $w = (1, 1)$ und geben Sie die Richtung h mit $\|h\| = 1$ an, für die $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0, y_0)$ maximal wird.

Lösungsvorschlag

Wir bestimmen zunächst $f'(x_0, y_0)$. Da f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, ist $f'(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, also $f'(x_0, y_0) = (a, b) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, für $a, b \in \mathbb{R}$, deren Werte wir bestimmen müssen. Weiter ist nach Abschnitt 19.9 der Vorlesung

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0)u = a + 2b = -1 \quad \text{und}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0)v = -a + b = 2.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $b = \frac{1}{3}$, und damit ist $a = -\frac{5}{3}$. Also ist $f'(x_0, y_0) = (-\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}.$$

Wie wir aus der Vorlesung, Abschnitt 19.12, wissen, zeigt der Gradient in die Richtung des stärksten Anstiegs von f. Somit ist die gesuchte Richtung

$$h = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} = \frac{f'(x_0, y_0)^T}{\|f'(x_0, y_0)^T\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26: (Übung)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = (\operatorname{grad} f(0, 0)) \cdot v$? Ist f differenzierbar?

Lösungsvorschlag

a) Klar: f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in $(x, y) \neq (0, 0)$. Ferner gilt

$$\left|\frac{y^3 - x^2y}{x^2 + y^2}\right| = |y| \left|\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |y| \frac{y^2 + x^2}{x^2 + y^2} = |y|$$

für alle $(x, y) \neq (0, 0)$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Also ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$.

b) Für $(x, y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\frac{-2x(x^2 + y^2) - (y^2 - x^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 + 4x^2y^2 - x^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0, 0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1.$$

c) Betrachte $(x_k, y_k) := (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \to (0, 0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) = -\frac{4\frac{1}{k^4}}{4\frac{1}{k^4}} = -1 \not\to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ unstetig in $(0, 0)$.
Betrachte $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0) \to (0, 0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) = -\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}} = -1 \not\to 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Also ist auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ unstetig in $(0, 0)$.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3(v_y^3 - v_x^2 v_y)}{t^3(v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2}.$$

Der Grenzwert und somit auch die Richtungsableitung von f in $(0,0)$, existiert also für alle Richtungen v.
Aber f ist nicht differenzierbar in $(0,0)$. Wäre f differenzierbar, so müsste laut Abschnitt 19.9 für jede Richtung v gelten

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = f'(0,0)v = \nabla f(0,0) \cdot v.$$

Wegen $(\nabla f)(0,0) \cdot v = v_y$ ist dies äquivalent zu der Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{v_y^3 - v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2} &= v_y \\ &\Leftrightarrow v_y^3 - v_x^2 v_y = v_x^2 v_y + v_y^3 \\ &\Leftrightarrow v_x^2 v_y = 0 \\ &\Leftrightarrow v_x = 0 \vee v_y = 0 \end{aligned}$$

Damit gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\nabla f)(0,0) \cdot v$ nicht für beliebige Richtungen, sondern nur genau dann, wenn $v_x = 0$ oder $v_y = 0$ gilt.

Aufgabe 27: (Übung)

Gegeben seien die Funktionen $f : D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y > 0\} \to \mathbb{R}^3$ und $g : E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (\ln(xy), \cos(x^2 + y), e^x) \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = e^x + yz + \ln(z).$$

a) Berechnen Sie die Ableitungen f' und g'.

b) Berechnen Sie mithilfe der Kettenregel die Ableitung $(g \circ f)'$.

c) Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'$, indem Sie $g \circ f$ explizit berechnen und dann ableiten.

Lösungsvorschlag

a) Da alle partiellen Ableitungen stetig sind, ist f nach Abschnitt 19.10 der Vorlesung differenzierbar und es gilt für alle $(x,y) \in D$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Ebenso ist g differenzierbar und es gilt für alle $(x,y,z) \in E$

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & z & y + \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

b) Laut Kettenregel ist für alle $(x, y) \in E$
$$(g \circ f)'(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f'(x, y).$$
Für alle $(x, y) \in E$ erhalten wir
$$g'(f(x, y)) = \begin{pmatrix} xy & e^x & \cos(x^2 + y) + e^{-x} \end{pmatrix}.$$
Also ist
$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f'(x, y) &= \begin{pmatrix} xy & e^x & \cos(x^2 + y) + e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2 + y) & -\sin(x^2 + y) \\ e^x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y - 2xe^x \sin(x^2 + y) + e^x \cos(x^2 + y) + 1 & x - e^x \sin(x^2 + y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2 + y) - 2x\sin(x^2 + y)) + 1 & x - e^x \sin(x^2 + y) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

c) Direkte Rechnung ergibt
$$(g \circ f)(x, y) = xy + e^x \cos(x^2 + y) + x$$
für alle $(x, y) \in D$. Die Ableitung davon ist
$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y + e^x(\cos(x^2 + y) - 2x\sin(x^2 + y)) + 1 & x - e^x \sin(x^2 + y) \end{pmatrix}\end{aligned}$$
für alle $(x, y) \in D$.

Aufgabe 28: (Tutorium)

Gegeben sei die Funktion
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alle partiellen Ableitungen von g.

c) Sind die partiellen Ableitungen von g im Punkt $(0, 0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0)$ für jede Richtung v, für die das möglich ist. Für welche v gilt $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = (\operatorname{grad} g(0, 0)) \cdot v$? Ist g differenzierbar?

Lösungsvorschlag

a) Klar: g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $(x, y) \neq (0, 0)$. Es ist $|\sin(x)| = \sin(|x|)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Ferner gilt $\sin(x) \leq x$ für alle $x \in [0, \infty)$. Es folgt
$$\left|\frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}\right| = \frac{\sin(\left|x^3 + y^3\right|)}{x^2 + y^2} \leq \frac{\left|x^3 + y^3\right|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\overbrace{|x|^3 + |y|^3}^{\leq 2\max\{x,y\}^3}}{\underbrace{x^2 + y^2}_{\geq \max\{x,y\}^2}} \leq 2\max\{x, y\}$$

für alle $(x,y) \neq (0,0)$ mit $\max\{x,y\} \leq 1$. Wenn $\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| \to 0$, so gilt sowohl $x \to 0$ als auch $y \to 0$, somit auch $\max\{x,y\} \to 0$. Deshalb gilt in der Tat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$. Also ist g stetig auf $\mathbb{R}^2$.

b) Wegen $g(x,y) = g(y,x)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$, reicht es aus, lediglich $\frac{\partial g}{\partial x}$ auszurechnen. Es ist dann $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für $(x,y) \neq 0$ gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2)\cos(x^3+y^3) - 2x\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ gilt hingegen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h^3)}{h^3} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h^2\cos(h^3)}{3h^2} = 1.$$

c) Betrachte $(x_k, y_k) := (0, \frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$. Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_k,y_k) = 0\frac{1}{k^4} = 0 \not\to 1 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0).$$

Also sind $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ unstetig in $(0,0)$.

d) Sei $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(tv) - g((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3(v_x^3+v_y^3))}{t^3(v_x^2+v_y^2)} \\ &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{3t^2(v_x^3+v_y^3)\cos(t^3(v_x^3+v_y^3))}{3t^2(v_x^2+v_y^2)} = \frac{v_x^3+v_y^3}{v_x^2+v_y^2}.\end{aligned}$$

Ferner ist $(\nabla g)(0,0)\cdot v = v_x + v_y$. Also gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\nabla g)(0,0)\cdot v &\Leftrightarrow \frac{v_x^3+v_y^3}{v_x^2+v_y^2} = v_x + v_y \\ &\Leftrightarrow v_x^3 + v_y^3 = v_x^3 + v_y^3 + v_x^2 v_y + v_x v_y^2 \\ &\Leftrightarrow -v_x^2 v_y = v_x v_y^2 \\ &\Leftrightarrow v_x = 0 \lor v_y = 0 \lor v_x = -v_y.\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung von g in $(0,0)$ existiert somit für beliebige Richtungen v. Analog zu **Aufgabe 26 d)** argumentiert man nun, dass g in $(0,0)$ **nicht** differenzierbar ist.

Aufgabe 29: (Tutorium)

Gegeben seien die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) := (x^2, y^2), \qquad g(x,y) := (\sin(xy), e^{x+y}), \qquad h(x,y) := (e^x\cos(y), \sinh(x)).$$

a) Berechnen Sie die Ableitungen f', g', h'.

b) Berechnen Sie mithilfe der Kettenregel die Ableitungen $(g\circ f)'$ und $(h\circ g)'$.

c) Berechnen Sie die Ableitungen $(g\circ f)'$ und $(h\circ g)'$, indem Sie $g\circ f$ bzw. $h\circ g$ explizit berechnen und dann ableiten.

Lösungsvorschlag

a) Da alle partiellen Ableitungen von f, g, h stetig sind, sind alle drei Funktionen nach Abschnitt 19.10 der Vorlesung differenzierbar und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ \cosh(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$g'(f(x,y)) = \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

$$h'(g(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich mithilfe der Kettenregel

$$(g\circ f)'(x,y) = g'(f(x,y))\cdot f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

$$(h\circ g)'(x,y) = h'(g(x,y))\cdot g'(x,y)$$
$$= \begin{pmatrix} y\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)} - e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)} - e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Direkte Rechnung ergibt

$$(g\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x^2y^2) & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$
$$(h\circ g)(x,y) = \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & \sinh(\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Ableitung davon ist

$$(g\circ f)'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial (g\circ f)_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial (g\circ f)_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

sowie

$$(h\circ g)'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial (h\circ g)_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial (h\circ g)_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial (h\circ g)_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial (h\circ g)_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)} - e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) & x\cos(xy)\cos(e^{x+y})e^{\sin(xy)} - e^{x+y}e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 30: (Tutorium) Sei $n \in \mathbb{N}, D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differentierbar in D. Für ein beliebiges $x \in D$ sei $f(x) = c \in \mathbb{R}$ und

$$N_c = \{x \in D \,:\, f(x) = c\}$$

die Niveaulinie von f zum Wert c.
Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x_0 \in N_c$ der Gradient von f in x_0 in diesem Punkt senkrecht auf N_c steht, d.h. es ist

$$\nabla f(x_0) \perp \tau_{x_0},$$

wobei τ_{x_0} ein Tangentialvektor an die Niveaulinie in x_0 ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-1,1) \to N_c$ entlang der Niveaulinie und nutzen Sie die Kettenregel.

Lösungsvorschlag

Sei γ wir im Hinweis. Dann ist

$$(f \circ \gamma)(t) = c = const,$$

für alle $t \in (-1,1)$, da f nach Definition auf N_c konstant ist und γ so gewählt ist, dass $\gamma(t) \in N_c$ ist für alle $t \in (-1,1)$. Also ist

$$(f \circ \gamma)'(t) = 0$$

für alle $t \in (-1,1)$.
Sei nun $x_0 \in N_c$ und $t_0 \in (-1,1)$ so, dass $\gamma(t_0) = x_0$ ist. Dann ist $\gamma'(t_0) = \tau_{x_0}$ der Tangentialvektor an die Niveaulinie in x_0 und weiter gilt unter Verwendung der Kettenregel

$$0 = (f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = (\nabla f(x_0) | \tau_{x_0})\,.$$