Institut für Analysis SS2017
PD Dr. Peer Christian Kunstmann 31.05.2017
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 31 (Übung)

a) Es sei die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $-1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, so wie eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \to V$ gibt mit

$$\varphi(x,y) = z \;\Leftrightarrow\; F(x,y,z) = 1$$

für alle $(x,y) \in U$ und $z \in V$. Berechnen Sie ferner die Ableitung φ' auf U.

b) Betrachten Sie für $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$ die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ implizit zwei stetig differenzierbare Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ definiert werden. Berechnen Sie $u'(0,0)$ und $v'(0,0)$.

Aufgabe 32 (Übung)

Es sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (\log(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch g bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass g in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass g nicht injektiv ist. Bestimmen Sie außerdem das Bild $g(G)$ für den Streifen

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \frac{\pi}{2}\}.$$

Aufgabe 33 (Übung)

a) Es seien die Funktionen $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x^y \quad \text{und} \quad g(x,y) = \cos(xy)\sin^2(y).$$

(i) Bestimmen Sie jeweils die Hessematrix $H_f(x,y)$ für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ und $H_g(x,y)$ für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

— Bitte wenden! —

(ii) Berechnen Sie nun das zweite Taylorpolynom $T_{2,(x_0,y_0)}$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 3)$, sowie das dritte Taylorpolynom $T_{3,(x_0,y_0)}$ von g im Punkt $(x_0, y_0) = (1, \frac{\pi}{2})$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-\alpha x^2 - \beta y^2}$$

für $\alpha, \beta > 0$. Bestimmen Sie alle *kritischen Punkte* von h, das heißt alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ für die gilt

$$(\nabla h)(x, y) = 0.$$

Bestimmen Sie nun die Menge der Maxima von h.

Aufgabe 34 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f(x, y, z)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xe^z - y^2$$

in jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und außerdem das zweite Talorpolynom $T_{2,(x_0,y_0,z_0)}$ von f im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$.

b) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen alle Extremstellen und entscheiden Sie jeweils ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + x - 2y - 2,$

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3.$

Aufgabe 35 (Tutorium)

Sei $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y + z > 1) \wedge (y + z > -1)\}$ und $F : W \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z) = \frac{1}{1 + y + z} + \log(x + y + z - 1).$$

a) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ gibt mit

$$g(x, y) = z \;\Leftrightarrow\; F(x, y, z) = 0$$

für alle $(x, y) \in U$ und $z \in V$. Berechnen Sie die Ableitung $g'(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}$, sowie eine streng monoton fallende, stetig differenzierbare Funktion $g_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ existieren mit $g(x, y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$.

Aufgabe 36 (Tutorium)

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x))\sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist. Ist f eine injektive Abbildung ?