Institut für Analysis SS2017
PD Dr. Peer Christian Kunstmann 02.06.2017
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 31: (Übung)

a) Es sei die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $-1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, so wie eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \to V$ gibt mit

$$\varphi(x, y) = z \;\Leftrightarrow\; F(x, y, z) = 1$$

für alle $(x, y) \in U$ und $z \in V$. Berechnen Sie ferner die Ableitung φ' auf U.

b) Betrachten Sie für $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ implizit zwei stetig differenzierbare Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ definiert werden. Berechnen Sie $u'(0, 0)$ und $v'(0, 0)$.

Lösungsvorschlag

(a) Klar: $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$, das heißt stetig differenzierbar. Ferner gilt $F(0, 0, -1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 = 1$ und für $\tilde{F}(x, y, z) = F(x, y, z) - 1$ gilt $\tilde{F}(0, 0, -1) = 0$ sowie

$$\begin{aligned}\tilde{F}'(x, y, z) = F'(x, y, z) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-3yz + 3x^2 & -3xz - 3y^2 & 3z^2 + 4z - 3xy\end{pmatrix}\end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, -1) = 3(-1)^2 + 4(-1) = -1 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (vgl. Abschnitt 19.15 der Vorlesung), existieren U, V und φ mit den geforderten Eigenschaften. Für die Ableitung φ' gilt

$$\begin{aligned}\varphi'(x, y) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x, y)}(x, y, \varphi(x, y)) \\ &= -\frac{1}{3\varphi^2(x, y) + 4\varphi(x, y) - 3xy} \cdot \begin{pmatrix}-3y\varphi(x, y) + 3x^2 & -3x\varphi(x, y) - 3y^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in U$.

(b) Definiere $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$G(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-u^2+v^2 \\ x^2+2y^2-3u^2+4v^2-1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Die Aufgabe besteht offenbar darin, die Gleichung $G(x,y,u,v) = \vec{0}$ in der Nähe des Punktes $(x,y,u,v) = (0,0,1,1)$ nach (u,v) aufzulösen.

Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4)$, das heißt stetig differenzierbar. Ferner gilt

$$G(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0^2+0^2-(1)^2+(1)^2 \\ 0^2+2\cdot 0^2-3\cdot(1)^2+4\cdot(1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{aligned} G'(x,y,u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial G_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Versuche die (2×2)-Matrix $\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ zu invertieren:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)\Big| I_2\right) &\sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ |\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \left(I_2 \Big| \left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)\right)^{-1}\right) \end{aligned}$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (vgl. Abschnitt 19.15 der Vorlesung) existiert eine offene Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, eine offene Menge $(1,1) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$, sowie ein $\varphi \in C^1(U,V)$ mit

$$G(x,y,u,v) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $(u,v) \in V$. Für die Ableitung φ' gilt

$$\varphi'(x,y) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,\varphi(x,y))$$

für alle $(x,y) \in U$. Insbesondere gilt für $(x,y) = (0,0)$

$$\varphi'(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u'(0,0) = (0,0) = v'(0,0)$.

Aufgabe 32: (Übung)

Es sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (\ln(2), \frac{\pi}{2})$ und eine offene Menge $V \ni (0, \frac{3}{4})$ gibt, so dass U durch g bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass g in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass g nicht injektiv ist. Bestimmen Sie außerdem das Bild $g(G)$ für den Streifen

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \frac{\pi}{2}\}.$$

Lösungsvorschlag

Wir berechnen für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(x)\cos(y) & -\cosh(x)\sin(y) \\ \cosh(x)\sin(x) & \sinh(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

(a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher. Es ist in der Tat

$$g\left(\ln(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln(2))\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sinh(\ln(2))\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$g'\left(\ln(2), \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{4}{5} \\ \mid \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $g'\left(\ln(2), \frac{\pi}{2}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $g^{-1} : V \to U$

$$(g^{-1})'\left(0, \frac{3}{4}\right) = (g^{-1})'\left(g\left(\ln(2), \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[g'\left(\ln(2), \frac{\pi}{2}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(g'(x, y)) = \sinh^2(x)\cos^2(y) + \cosh^2(x)\sin^2(y).$$

Gilt aber $0 = \sinh^2(x)\cos^2(y) + \cosh^2(x)\sin^2(y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\cos(y) \neq 0$ und $x > 0$ so folgt (da $\sinh^2(x) > 0$) schon

$$0 \leq \tan^2(y) = -\tanh^2(x) < 0.$$

Dies ist ein Widerspruch und es gilt folglich $\det(f'(x, y)) = 0$ genau dann, wenn $\cos^2(y) = \sin^2(y) = 0$. Wegen $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \pi(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ werden $\sin^2$ bzw. $\cos^2$ nie gleichzeitig verschwinden.

Also ist $\det(g'(x,y)) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. g ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$g(x, y+2\pi) = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y+2\pi) \\ \sinh(x)\sin(y+2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x)\cos(y) \\ \sinh(x)\sin(y) \end{pmatrix} = g(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist g nicht injektiv. Zudem bemerken wir

$$\cosh(\mathbb{R}) = [1,\infty), \quad \sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad \sin((0,\frac{\pi}{2})) = (0,1) \quad \text{und} \quad \cos((0,\frac{\pi}{2})) = (0,1).$$

Damit folgt $g(G) = g(\mathbb{R} \times (0, \frac{\pi}{2})) = (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 33: (Übung)

a) Es seien die Funktionen $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x^y \quad \text{und} \quad g(x,y) = \cos(xy)\sin^2(y).$$

(i) Bestimmen Sie jeweils die Hessematrix $H_f(x,y)$ für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ und $H_g(x,y)$ für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Berechnen Sie nun das zweite Taylorpolynom $T_{2,(x_0,y_0)}$ von f im Punkt $(x_0,y_0) = (1,3)$, sowie das dritte Taylorpolynom $T_{3,(x_0,y_0)}$ von g im Punkt $(x_0,y_0) = (1, \frac{\pi}{2})$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = (x^2+y^2)e^{-\alpha x^2 - \beta y^2}$$

für $\alpha, \beta > 0$. Bestimmen Sie alle *kritischen Punkte* von h, das heißt alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ für die gilt

$$(\nabla h)(x,y) = 0.$$

Bestimmen Sie nun die Menge der Maxima von h.

Lösungsvorschlag

(a) *Teil (i)*: Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ dann gilt für $f(x,y) = x^y = e^{y\ln(x)}$

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & \ln(x)x^y \end{pmatrix}^T$$

und für die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^2-y)x^{y-2} & (1+y\ln(x))x^{y-1} \\ (1+y\ln(x))x^{y-1} & \ln^2(x)x^y \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(\nabla g)(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(xy)y\sin^2(y) & -\sin(xy)x\sin^2(y) + \cos(xy)\sin(2y) \end{pmatrix}^T$$

und daher berechnen wir für die Einträge der Hessematrix $H_g(x,y)$ von g

$$
\begin{aligned}
(H_g(x,y))_{11} &= -\cos(xy)y^2\sin^2(y),\\
(H_g(x,y))_{12} = (H_g(x,y))_{21} &= -(\cos(xy)xy + \sin(xy))\sin^2(y) - \sin(xy)y\sin(2y),\\
(H_g(x,y))_{22} &= -\cos(xy)x^2\sin^2(y) - 2\sin(xy)x\sin(2y) + 2\cos(xy)\cos(2y)
\end{aligned}
$$

wobei das Additionstheorem für $\frac{d}{dy}\sin^2(y) = 2\cos(y)\sin(y) = \sin(2y)$ zur Vereinfachung benutzt wurde.

Teil (ii): Wir wiederholen zunächst die Bemerkungen (b) und (c) in Abschnitt 19.16 der Vorlesung und erhalten die Darstellung

$$
\begin{aligned}
T_{2,(x_0,y_0)}(\vec{h}) &= f(x_0,y_0) + (\nabla\cdot\vec{h})f(x_0,y_0) + \frac{(\nabla\cdot\vec{h})^2}{2}f(x_0,y_0)\\
&= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)^T\cdot\vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}^T H_f(x_0,y_0)\vec{h}
\end{aligned}
$$

für das zweite Taylorpolynom im Entwicklungspunkt (x_0,y_0) in $\vec{h} = (x-x_0, y-y_0)$. Es gilt $f(1,3) = 1$ und nach Teil (i) folgt $\nabla f(1,3) = (3,0)$, sowie

$$
H_f(1,3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Daher gilt

$$
\begin{aligned}
T_{2,(1,3)}(\vec{h}) &= f(1,3) + \nabla f(1,3)^T\cdot\vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}^T H_f(1,3)\vec{h}\\
&= 1 + 3\vec{h}_1 + 3\vec{h}_1^2 + \vec{h}_1\vec{h}_2\\
&= 4 - 6x + 3x^2 + xy - y.
\end{aligned}
$$

Für g genügt es auf Grund des Satzes von Schwarz (vgl. Abschnitt 19.11 in der Vorlesung) zur Bestimmung des dritten Taylorpolynoms von g die Ableitungen

$$
\frac{\partial}{\partial x}(H_g(x,y))_{11},\ \frac{\partial}{\partial y}(H_g(x,y))_{11},\ \frac{\partial}{\partial x}(H_g(x,y))_{22}\ \text{ und }\ \frac{\partial}{\partial y}(H_g(x,y))_{22}
$$

zu berechnen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(H_g(x,y))_{11} &= \sin(xy)y^3\sin^2(y),\\
\frac{\partial}{\partial y}(H_g(x,y))_{11} &= \sin(xy)xy^2\sin^2(y) - 2\cos(xy)y\sin^2(y) - \cos(xy)y^2\sin(2y),\\
\frac{\partial}{\partial x}(H_g(x,y))_{22} &= \sin(xy)yx^2\sin^2(y) - 2\cos(xy)x\sin^2(y) - 2\cos(xy)xy\sin(2y)\\
&\quad - 2\sin(xy)\sin(2y) - 2\sin(xy)y\cos(2y),\\
\frac{\partial}{\partial y}(H_g(x,y))_{22} &= \sin(xy)x^3\sin^2(y) - 2\cos(xy)x^2\sin(y)\cos(y) - 2\cos(xy)x^2\sin(2y)\\
&\quad - 4\sin(xy)x\cos(2y) - 2\sin(xy)x\cos(2y) - 4\cos(xy)\sin(2y).
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}(H_g(x,y))_{11}\right)_{|\ (x,y)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi^3}{8}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y}(H_g(x,y))_{11}\right)_{|\ (x,y)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi^2}{4},
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}(H_g(x,y))_{22}\right)_{|\ (x,y)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y}(H_g(x,y))_{22}\right)_{|\ (x,y)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = 7
$$

und für das dritte Taylorpolynom von g in $(x_0, y_0) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ folgt mit

$$\nabla g\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right), \quad H_g\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(\nabla\cdot\vec{h})^3 g(x_0,y_0) = \vec{h}_1^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} g(x_0,y_0) + 3\vec{h}_1^2\vec{h}_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) + 3\vec{h}_2^2\vec{h}_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x_0,y_0) + \vec{h}_2^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} g(x_0,y_0)$$

die Rechnung

$$\begin{aligned}
T_{3,\left(1,\frac{\pi}{2}\right)}(\vec{h}) &= g\left(1,\frac{\pi}{2}\right) + \nabla g\left(1,\frac{\pi}{2}\right)^T \cdot \vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}^T H_g\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\vec{h} + \frac{1}{6}(\nabla\cdot\vec{h})^3 g\left(1,\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\vec{h}_1\frac{\pi}{2} - \vec{h}_2 - \vec{h}_1\vec{h}_2 + \vec{h}_1^3\frac{\pi^3}{48} + \vec{h}_1^2\vec{h}_2\frac{\pi^2}{8} + \vec{h}_2^2\vec{h}_1\frac{3\pi}{4} + \vec{h}_2^3\frac{7}{6} \\
&= -(x-\frac{\pi}{2})\frac{\pi}{2} - (y-1) - (x-\frac{\pi}{2})(y-1) + (x-\frac{\pi}{2})^3\frac{\pi^3}{48} + (x-\frac{\pi}{2})^2(y-1)\frac{\pi^2}{8} \\
&\quad + (x-\frac{\pi}{2})(y-1)^2\frac{3\pi}{4} + (y-1)^3\frac{7}{6} \\
&= y^2\left(\frac{3\pi}{4}x + \frac{7}{6}y - \frac{3\pi^2}{8} - \frac{7}{2}\right) + yx\left(\frac{\pi^2}{8}x - \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} - 1\right) + y\left(\frac{\pi^4}{32} + \frac{3\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\right) \\
&\quad + x^2\left(\frac{\pi^3}{48}x - \frac{\pi^4}{32} - \frac{\pi^2}{8}\right) + x\left(\frac{\pi^5}{64} + \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi}{4} + 1 - \right) - \frac{\pi^6}{384} - \frac{\pi^4}{32} - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}h(x,y) &= 2xe^{-\alpha x^2-\beta x^2} - 2\alpha\|(x,y)\|^2 xe^{-\alpha x^2-\beta x^2} \quad \text{und} \\
\frac{\partial}{\partial y}h(x,y) &= 2ye^{-\alpha x^2-\beta x^2} - 2\beta\|(x,y)\|^2 ye^{-\alpha x^2-\beta x^2}.
\end{aligned}$$

Daher folgt

$$(\nabla h)(x,y) = e^{-\alpha x^2-\beta x^2}\left(2x(1-\alpha\|(x,y)\|^2), 2y(1-\beta\|(x,y)\|^2)\right)^T.$$

Wir machen eine Fallunterscheidung und nehmen zunächst $\alpha \neq \beta$ (Fall 1) an. Es gilt

$$(\nabla h)(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(2x(1-\alpha\|(x,y)\|^2), 2y(1-\beta\|(x,y)\|^2)\right)^T = 0.$$

Fall 1.1: $x = 0,\; y \in \mathbb{R}$

Hier folgt dann aus $(\nabla h)(x,y) = 0$ entweder $y = 0$ oder andernfalls $1 - \beta\|(x,y)\|^2 = 0$, das heißt $|y| = \|(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

Fall 1.2: $x \neq 0, y \in \mathbb{R}$

Hier folgt aus $(\nabla h)(x,y) = 0$ schon $\|(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, das heißt wäre $y \neq 0$ so hätten wir mit $\alpha = \beta$ einen (Fall-)Widerspruch. Damit ist $y = 0$ und $|x| = \|(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Die Menge der kritischen Punkte ist daher

$$\left\{(0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, 0\right)\right\}.$$

Wir nehmen nun $\alpha = \beta$ (<u>Fall 2</u>) an. In diesem Fall sieht man wie oben ein, dass die Menge der kritischen Punkte genau die Menge

$$\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)\alpha = 1\}$$

ist. Wir berechnen nun die Hessematrix für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{\alpha x^2+\beta y^2} H_h(x,y) = \begin{pmatrix} -4\alpha x^2(2-\alpha\|(x,y)\|^2) - 2\alpha\|(x,y)\|^2 + 2 & -4xy(\alpha+\beta) + 4\alpha\beta xy\|(x,y)\|^2 \\ -4xy(\alpha+\beta) + 4\alpha\beta xy\|(x,y)\|^2 & -4\beta y^2(2-\beta\|(x,y)\|^2) - 2\beta\|(x,y)\|^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass im Punkt $(x,y) = (0,0)$ ein globales Minimum vorliegt. Ist $(x,y) \neq (0,0)$ so gilt im Fall 2 mit $\|(x,y)\|^2 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$

$$e^{\alpha x^2+\beta y^2} H_h(x,y) = \begin{pmatrix} -4\alpha x^2 & -4xy\alpha \\ -4xy\alpha & -4\alpha y^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \det(e^{\alpha x^2+\beta y^2} H_h(x,y)) &= 16x^2y^2\alpha^2 - 16x^2y^2\alpha^2 = 0 \quad \text{und} \\ H_h(x,y))_{22} + H_h(x,y))_{11} &= -4\alpha y^2 e^{-\alpha x^2-\beta y^2} - 4\alpha x^2 e^{-\alpha x^2-\beta y^2} < 0 \end{aligned}$$

und für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $\mathrm{spur}(A) = A_{11} + A_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ mit den Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Damit folgt, dass für die Hessematrix $H_h(x,y)$ für $\|(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ mit Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ stets $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 < 0$ gilt. Aus dem Charakterisierungssatz in Abschnitt 18 der Vorlesung ist die Hessematrix negativ semidefinit. Damit ist die Menge der Maxima

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)\alpha = 1\}.$$

Im Fall 1 gilt

$$\begin{aligned} H_h(x,y) &= e^{-1}\begin{pmatrix} 2(1-\frac{\alpha}{\beta}) & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{falls } x = 0,\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{\beta}} \quad \text{und} \\ H_h(x,y) &= e^{-1}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2(1-\frac{\beta}{\alpha}) \end{pmatrix} \quad \text{falls } x = \pm\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\ y = 0. \end{aligned}$$

Wir machen erneut eine Fallunterscheidung und nehmen $\alpha > \beta$ an. Dann folgt aus dem Kriterium von Hurwitz (Beziehungsweise erneut aus dem Charakterisierungssatz in Abschnitt 18 der Vorlesung), dass die Menge der Maxima

$$\left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) \right\}$$

ist. Nehmen wir hingegen $\alpha < \beta$ an, so ist die Menge der Maxima

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, 0\right) \right\}.$$

Aufgabe 34: (Tutorium)

a) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f(x,y,z)$ der Funktion

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad f(x,y,z)=xe^z-y^2$$

in jedem Punkt $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ und außerdem das zweite Talorpolynom $T_{2,(x_0,y_0,z_0)}$ von f im Punkt $(x_0,y_0,z_0)=(1,-1,0)$.

b) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen alle Extremstellen und entscheiden Sie jeweils ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

(i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=xy+x-2y-2,$

(ii) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad g(x,y)=2x^3-3xy+2y^3-3.$

Lösungsvorschlag

(a) Das zweite Taylorpolynom von f in x_0 ist gegeben durch $(h=(x-x_0,y-y_0,z-z_0))$

$$(T_2(f,(x_0,y_0,z_0)))(x,y,z):=f(x_0,y_0,z_0)+h\cdot(\nabla f)(x_0,y_0,z_0)+\frac{1}{2}h^T H_f(x_0,y_0,z_0)h.$$

Für f ergibt sich

$$(\nabla f)(x,y,z)=\begin{pmatrix}e^z\\-2y\\xe^z\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}0&0&e^z\\0&-2&0\\e^z&0&xe^z\end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$f(x_0,y_0,z_0)=0,\qquad(\nabla f)(x_0,y_0,z_0)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\qquad H_f(x_0,y_0,z_0)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich (schreibe $h=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$)

$$\begin{aligned}(T_2(f,(x_0,y_0,z_0)))(x,y,z)&=0+(x-x_0)+2(y-y_0)+(z-z_0)+\frac{1}{2}(-2(y-y_0)^2\\&\quad+(z-z_0)^2+2(x-x_0)(z-z_0))\\&=\frac{1}{2}z^2-y^2+xz+x.\end{aligned}$$

(b) (i) Klar: $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne f'. Es ist

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+1&x-2\end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Laut Vorlesung ist $f'(x_0,y_0)=0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von f. Also ist $(x_0,y_0)=(2,-1)$ der einzige kritische Punkt von f.

Berechne nun $H_f(x_0, y_0)$. Es ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuche $H_f(x_0, y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit. Das charakteristische Polynom p_A ist durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind ± 1 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung in Abschnitt 18 der Vorlesung ist also A indefinit. Daher hat f in (x_0, y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

(ii) Klar: $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne g'. Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 - 3y & -3x + 6y^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Laut Vorlesung ist $g'(x_0, y_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für jede Stelle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eines lokalen Extremums von g. Berechne diese kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} g'(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (6x^2 - 3y = 0) \wedge (-3x + 6y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 2y^2) \wedge (6x^2 = 3y) \\ &\Leftrightarrow \quad (x = 2y^2) \wedge (24y^4 = 3y) \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee \left(x = y = \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Also sind $(x_0, y_0) = (0,0)$ und $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ genau die kritischen Punkte von g.

Berechne nun H_g. Es ist

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Untersuche $H_g(x_0, y_0) =: A$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_A ist durch

  $$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3^2 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind ± 3 die Eigenwerte von A. Nach der Charakterisierung in Abschnitt 18 der Vorlesung ist also A indefinit. Daher hat g in (x_0, y_0) kein lokales Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

- Untersuche $H_g(x_1, y_1) =: B$ durch Bestimmung der Eigenwerte auf Definitheit: Das charakteristische Polynom p_B ist durch

  $$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)^2 - 3^2 = (3 - \lambda)(9 - \lambda)$$

  für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Also sind 3 und 9 die Eigenwerte von B. Nach der Charakterisierung in Abschnitt 18 der Vorlesung ist also B positiv definit. Daher hat g in (x_1, y_1) ein lokales Minimum.

Aufgabe 35: (Tutorium)
Sei $W := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z>1) \wedge (y+z>-1)\}$ und $F : W \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = \frac{1}{1+y+z} + \ln(x+y+z-1).$$

a) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $(\frac{1}{\sqrt{e}},0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $1 \in V \subseteq \mathbb{R}$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ gibt mit

$$g(x,y) = z \;\Leftrightarrow\; F(x,y,z) = 0$$

für alle $(x,y) \in U$ und $z \in V$. Berechnen Sie die Ableitung $g'(\frac{1}{\sqrt{e}},0)$.

b) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Menge $0 \in U_2 \subseteq \mathbb{R}$, sowie eine streng monoton fallende, stetig differenzierbare Funktion $g_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ existieren mit $g(x,y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$.

Lösungsvorschlag

(a) Klar: $F \in C^1(D)$. Ferner gilt

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0,1\right) = \frac{1}{1+0+1} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}+0+1-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

sowie

$$\begin{aligned} F'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} & -\frac{1}{(1+y+z)^2} + \frac{1}{x+y+z-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in D$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{e}},0,1\right) = -\frac{1}{(1+0+1)^2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}+0+1-1} = \sqrt{e} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (vgl. Abschnitt 19.15 der Vorlesung), existieren U, V und g mit den geforderten Eigenschaften.

(b) Für die Ableitung g' gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(1+y+g(x,y))^2} - \frac{1}{x+y+g(x,y)-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y+g(x,y)-1} & -\frac{1}{(1+y+g(x,y))^2} + \frac{1}{x+y+g(x,y)-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{x+y+g(x,y)-1}{(1+y+g(x,y))^2}-1} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in U$. Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{e}} + \varepsilon\right) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) =: U_1 \times U_2 \subseteq U$$

(dies funktioniert, weil U offen ist und $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) \in U$). Nach dem Hauptsatz der Analysis gilt für jedes $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$

$$g(x,y) = g(x,0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial y}(x,t)dt = g(x,0) - y$$

Setze $g_1(x) := g(x,0)$ für alle $x \in U_1$. Klar: $g_1 \in C^1(U_1)$ und $g(x,y) = g_1(x) - y$ für alle $x \in U_1$ und alle $y \in U_2$. Bleibt nachzuweisen, dass g_1 streng monoton fallend ist. Betrachte dazu

$$g_1'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = \frac{1}{\frac{x+0+g(x,0)-1}{(1+0+g(x,0))^2} - 1} = \frac{1}{\frac{x+g_1(x)-1}{(1+g_1(x))^2} - 1}$$

für alle $x \in U_1$. Insbesondere ist, wegen $g_1\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right) = 1$, für $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ist

$$g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}+1-1}{(1+1)^2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{4\sqrt{e}} - 1}.$$

Das Vorzeichen des Nenners ist wegen $1 < \sqrt{e}$ bzw. $\frac{1}{4\sqrt{e}} < \frac{1}{4}$ negativ. Damit ist $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) < 0$. Da g_1' stetig ist, lässt sich ε nötigenfalls verkleinern, damit $g'(x) < 0$ für alle $x \in U_1$ gilt. Also ist g_1 in der Tat streng monoton fallend auf einer offenen Menge $\frac{1}{\sqrt{e}} \in U_1$.

Aufgabe 36: (Tutorium)

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x))\sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \ni (0, \frac{\pi}{4})$ und eine offene Menge $V \ni (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ gibt, so dass U durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist. Ist f eine injektive Abbildung ?

Lösungsvorschlag

Wir berechnen vorbereitend für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2+\arctan(x))\cos(y) \\ -e^x\cos(y) & e^x\sin(y) \end{pmatrix}$$

(a) Wir stellen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes aus Abschnitt 19.14 der Vorlesung sicher. Es ist in der Tat

$$f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} (2+\arctan(0))\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -e^0\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen die Inverse von

$$f'\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{cccc}\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +\end{array}\quad\sim\quad\left(\begin{array}{cccc}\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ \cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\end{array}$$

$$\sim\quad\left(\begin{array}{cccc}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\mid\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\\ \mid\cdot\frac{2}{3\sqrt{2}}\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc}1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3}\end{array}\right)$$

Also ist $f'\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ in der Tat invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren die gesuchten offenen Mengen U und V. Ebenfalls nach dem Umkehrsatz gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}:V\to U$

$$(f^{-1})'\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(f^{-1})'\left(f\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[f'\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$$

(b) Es gilt nach obiger Rechnung

$$\det(f'(x,y))=\frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2}+e^x(2+\arctan(x))\cos^2(y)$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Gilt aber $0=\frac{\sin^2(y)e^x}{1+x^2}+e^x(2+\arctan(x))\cos^2(y)$ für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $\cos(y)\neq 0$ so folgt (da $2+\arctan(x)>0$) schon

$$0\le\tan^2(y)=-(1+x^2)(2+\arctan(x))<0.$$

Dies ist ein Widerspruch und es gilt folglich $\det(f'(x,y))=0$ genau dann, wenn $\cos^2(y)=\sin^2(y)=0$. Wegen $\sin(y)=0\Leftrightarrow y\in\pi\mathbb{Z}$ und $\cos(y)=0\Leftrightarrow y\in\pi(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})$ werden $\sin^2$ bzw. $\cos^2$ nie gleichzeitig verschwinden.

Das heißt $\det(f'(x,y))>0$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Damit ist der Umkehrsatz überall anwendbar, d.h. f ist überall lokal invertierbar.

Wegen

$$f(x,y+2\pi)=\begin{pmatrix}(2+\arctan(x))\sin(y+2\pi)\\ -e^x\cos(y+2\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2+\arctan(x))\sin(y)\\ -e^x\cos(y)\end{pmatrix}=f(x,y)$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist f nicht injektiv.