Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.,
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
07.06.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

Es seien

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + 2x_2^2 = 6\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 5\right\}.$$

Zeigen Sie, dass ein $\vec{x}_0 \in A$ und ein $\vec{y}_0$ in B existieren, mit

$$\|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| = \operatorname{dist}(A, B) := \inf_{\vec{x} \in A, \vec{y} \in B} \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Berechnen Sie den Wert von $\operatorname{dist}(A, B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

Aufgabe 38 (Übung)

(a) Man beschreibe die durch die Gleichung $\mathrm{e}^{xy} = x + y$ gegebene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, unter der Nebenbedingung $\mathrm{e}^{xy} = x + y$.

Aufgabe 39 (Übung)

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w})$,

(b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}$.

Hinweis: Verwenden Sie

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e_k}, \quad \nabla \times \vec{v} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \partial_i v_j \vec{e_k}$$

mit dem Levi-Cività-Symbol

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von } (123) \text{ ist}, \\ -1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von } (123) \text{ ist}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 40 (Tutorium)

(a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(1, 0, 0)$ von der durch die Gleichung $x + y - z = 0$ gegebenen Ebene.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := 4x^2 - 3xy \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

auf der Einheitskreisscheibe $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 41 (Tutorium)

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 5x + y - 3z$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ auf der Menge

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Aufgabe 42 (Tutorium)

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} + (\nabla \cdot \vec{w})\vec{v} - (\nabla \cdot \vec{v})\vec{w}$,

(b) $\nabla(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})$.

Bemerkung: Auf der rechten Seite bedeutet $\vec{v} \cdot \nabla = v_1\partial_1 + v_2\partial_2 + v_3\partial_3$ und wirkt in $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}$ auf jede Komponente von $\vec{w}$ etc.

Hinweis zur Klausuranmeldung

- Am Montag, den 18.09.2017 von 13:00 bis 15:00 findet die Klausur in Höherer Mathematik II für die Fachrichtung Physik statt.
- Teilnahme an der Klausur erfordert eine vorherige **Anmeldung**. Studenten in den Bachelor-Studiengängen können sich im *Onlineportal Campus Management* für Studierende anmelden.
- **Anmeldeschluss** ist **Samstag, der 29.07.2017**. Spätere Anmeldungen können leider nicht mehr berücksichtigt werden. Es wird empfohlen, den Erfolg der Anmeldung im Onlinesystem zu **überprüfen** und zu **dokumentieren** (z.B. mittels eines Screenshots).