Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.,
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
07.06.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

Es seien

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + 2x_2^2 = 6\} \quad \text{und} \quad B = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 5\}.$$

Zeigen Sie, dass ein $\vec{x}_0 \in A$ und ein $\vec{y}_0$ in B existieren, mit

$$\|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| = \operatorname{dist}(A, B) := \inf_{\vec{x} \in A, \vec{y} \in B} \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Berechnen Sie den Wert von $\operatorname{dist}(A, B)$ mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

LÖSUNGSVORSCHLAG

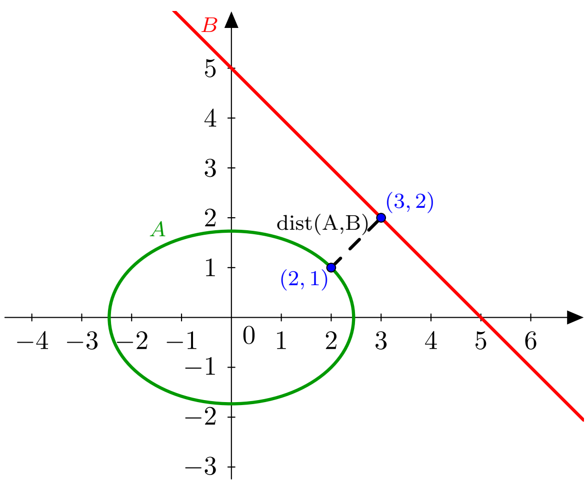
Wir beginnen mit ein paar Vorüberlegungen:
Für $\vec{x} = (2, 1)$ und $\vec{y} = (4, 1)$ ist $\vec{x} \in A$ und $\vec{y} \in B$. Damit ist $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 2 \geq \operatorname{dist}(A, B)$.
Ferner gilt für alle $\vec{x} = (x_1, x_2) \in A$

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq x_1^2 + 2x_2^2 = 6 < 9,$$

also $\|\vec{x}\| < 3$. Ferner gilt für alle $\vec{y} \in B$ mit $\|\vec{y}\| > 5$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq |\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,| = \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| > 5 - 3 = 2 \geq \operatorname{dist}(A, B).$$

Ist $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 > 36$, so ist nach Obigem $\|\vec{y}\|^2 > 36 - \|\vec{x}\|^2 > 25$, also $\|\vec{y}\| > 5$ und $\|\vec{x} - \vec{y}\| > 2$.



Betrachte nun die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\|^2$$

für alle $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Klar: $F \in C^1(\mathbb{R}^4)$.
Ferner sei $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \\ y_1 + y_2 - 5 \end{pmatrix}$$

für alle $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Ebenfalls klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$.
Nach obiger Vorüberlegung gilt $F(\vec{x}, \vec{y}) > 4$ für alle

$$\|(\vec{x}, \vec{y})\| = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2} > 6$$

und $F(2, 1, 4, 1) = 4$, wobei $G(2, 1, 4, 1) = \vec{0}$ und $\|(2, 1, 4, 1)\| = \sqrt{22} < 6$. Es folgt also

$$\inf \left\{ F(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \wedge G(\vec{v}) = \vec{0} \right\} = \inf \left\{ F(\vec{v}) : \vec{v} \in \overline{K}(\vec{0}, 6) \wedge G(\vec{v}) = \vec{0} \right\} = \inf_{\vec{v} \in S} F(\vec{v})$$

mit $S = G^{-1}(\{\vec{0}\}) \cap \overline{K}(\vec{0}, 6)$.
Da G stetig ist und $\{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, ist auch $G^{-1}(\{\vec{0}\})$ abgeschlossen. Nach Abschnitt 19.2 der Vorlesung ist $\overline{K}(\vec{0}, 6)$ abgeschlossen. Damit ist S beschränkt und abgeschlossen, also nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung kompakt.
Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen Minimum und Maximum annehmen (Abschnitt 19.17 der Vorlesung), existiert ein $\vec{v}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in S$ mit

$$F(\vec{v}_0) = \min_{\vec{v} \in S} F(\vec{v}).$$

Die gesuchten Vektoren sind also gerade $\vec{x}_0$ und $\vec{y}_0$.
Die Stelle $\vec{v}$ des globalen Minimums von F unter der Nebenbedingung $G = \vec{0}$ ist natürlich auch eine Stelle eines lokalen Extremums von F unter der Nebenbedingung $G = \vec{0}$. Wir wenden die Multiplikatorenregel von Lagrange (vgl. Abschnitt 19.19 der Vorlesung) an, um diese zu identifizieren: Es ist

$$G'(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Wegen $G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = (x_1, x_2) \neq \vec{0}$, hat G' auf $G^{-1}(\{\vec{0}\})$ den vollen Rang 2. Es existiert also $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$F'(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{\lambda}^T G'(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Zusammen mit der Nebenbedingung $G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \vec{0}$ ergibt dies die folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2(x_1 - y_1) &= 2x_1\lambda_1 && (1) \\ 2(x_2 - y_2) &= 4x_2\lambda_1 && (2) \\ -2(x_1 - y_1) &= \lambda_2 && (3) \\ -2(x_2 - y_2) &= \lambda_2 && (4) \\ x_1^2 + 2x_2^2 &= 6 && (5) \\ y_1 + y_2 &= 5 && (6) \end{aligned}$$

Wir wollen zunächst $\lambda_1 \neq 0$ einsehen: Wäre $\lambda_1 = 0$, dann folgte aus (1) und (2) $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$. Dann wäre mit (6) $x_1 = 5 - x_2$ und mit (5) $(5 - x_2)^2 + 2x_2^2 = 6$, bzw. $x_2^2 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{19}{3} = 0$. Wegen $\left(\frac{5}{3}\right)^2 < \frac{19}{3}$ hat diese Gleichung keine reellen Lösungen. Also ist in der Tat $\lambda_1 \neq 0$.
Einsetzen von (3) in (1) und (4) in (2) liefert

$$2x_1\lambda_1 = -\lambda_2 = 4x_2\lambda_1.$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ nach Obigem, muss

$$x_1 = 2x_2 \tag{7}$$

gelten. Einsetzen in (5) liefert $x_2^2 = 1$, also $x_2 \in \{-1, 1\}$. Differenzbildung von (3) und (4) liefert $(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = 0$. Einsetzen von (7) und (6) liefert $y_1 = \frac{5+x_2}{2}$. Wieder (6) liefert schließlich $y_2 = \frac{5-x_2}{2}$. Zusammenfassend ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 \\ x_2 &\in \{-1, 1\} \\ y_1 &= \frac{5 + x_2}{2} \\ y_2 &= \frac{5 - x_2}{2} \end{aligned}$$

Insgesamt also $\vec{v} \in \{(-2, -1, 2, 3), (2, 1, 3, 2)\}$.
Wegen $F(-2, -1, 2, 3) = 32$ und $F(2, 1, 3, 2) = 2$ wird das Minimum bei $\vec{v}_0 = (2, 1, 3, 2)$ angenommen mit

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sqrt{F(\vec{v}_0)} = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 38 (Übung)

(a) Man beschreibe die durch die Gleichung $\mathrm{e}^{xy} = x + y$ gegebene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, unter der Nebenbedingung $\mathrm{e}^{xy} = x + y$.

Lösungsvorschlag

(a) Sei $N := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{e}^{xy} = x + y\} = g^{-1}(\{0\})$ mit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \mathrm{e}^{xy} - x - y$.

(i) N ist als Urbild von $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung g abgeschlossen.

(ii) N ist symmetrisch bezüglich der Diagonalen $\{x = y\}$, das heißt $(x,y) \in N \Leftrightarrow (y,x) \in N$.

(iii) N schneidet die Diagonale nicht. Betrachte dazu die Funktion $h(x) = g(x,x) = \mathrm{e}^{x^2} - 2x$. Dann gilt sicherlich $h(x) > 0$ für $x \leq 0$, mit $h(0) = 1$. Ferner ist $h'(x) = 2x(\mathrm{e}^{x^2} - 1) > 0$ für $x > 0$, und damit auch $h(x) > 0$ für $x > 0$. Insgesamt ist also $g(x,x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit $(x,x) \notin N$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind

x-**Achse:** $P_1 = (1,0)$, denn aus $y = 0$ folgt sofort $x = \mathrm{e}^0 = 1$.

y-**Achse:** $P_2 = (0,1)$.

Die Tangenten an diesen Punkten stehen senkrecht zum Gradienten

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} - 1 \\ x\mathrm{e}^{xy} - 1 \end{pmatrix}$$

von g, also $\nabla g(P_1) = (-1,0)^T$ und $\nabla g(P_2) = (0,-1)$.

(v) Wir suchen Nullstellen des Gradienten: falls $\nabla g(x,y) = 0$, muss schon $x = y$ gelten und damit $x\mathrm{e}^{x^2} = 1$. Die eindeutige Lösung dieser Gleichung werde mit $x_* > 0$ bezeichnet. Es folgt dass $\nabla g(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y = x_*$. Da $g(x_*,x_*) = \mathrm{e}^{x_*^2} - 2x_* = \frac{1}{x_*} - 2x_* \neq 0$ (die einzige positive Lösung von $\frac{1}{\alpha} - 2\alpha = 0$ ist $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq x_*$), gilt also insbesondere $\nabla g(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in N$.

(vi) Nach dem Satz über implizite Funktionen kann daher die Gleichung $g(x,y) = 0$ in der Umgebung eines jeden Punktes in N eindeutig aufgelöst werden. Zum Beispiel gilt in einer Umgebung von P_2: $\tilde{y}(0) = 1$,

$$\tilde{y}'(0) = -\frac{\partial_x g(P_2)}{\partial_y g(P_2)} = 0,$$

und (da g sogar unendlich oft stetig differenzierbar ist)

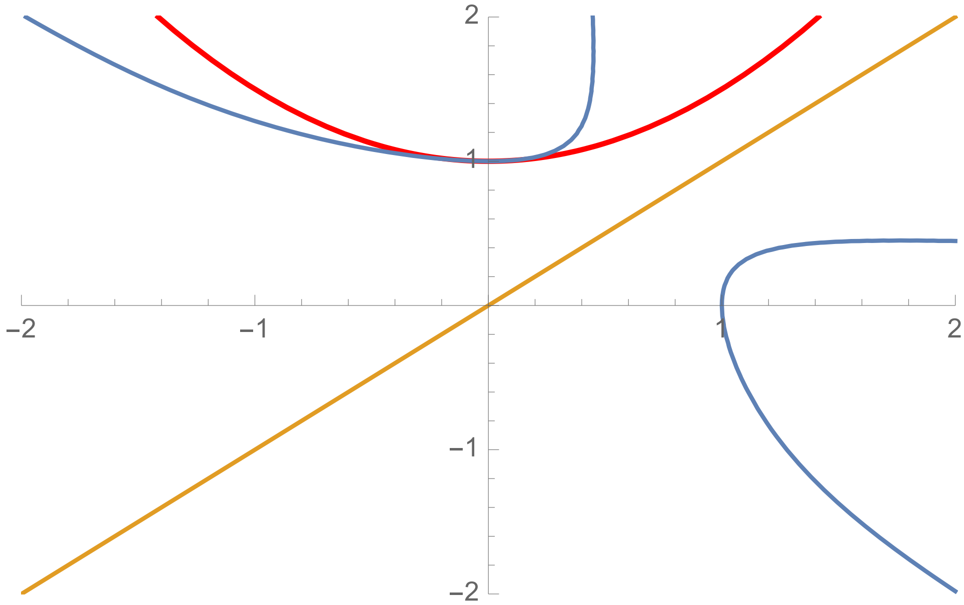
$$\begin{aligned} \tilde{y}''(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{y}'(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial_x g(x,\tilde{y}(x))}{\partial_y g(x,\tilde{y}(x))} \\ &= -\frac{\partial_x^2 g(x,\tilde{y}(x)) + \partial_y\partial_x g(x,\tilde{y}(x))\tilde{y}'(x)}{\partial_y g(x,\tilde{y}(x))} - \frac{\partial_x\partial_y g(x,\tilde{y}(x)) + \partial_y^2 g(x,\tilde{y}(x))\tilde{y}'(x)}{\partial_y g(x,\tilde{y}(x))}\tilde{y}'(x). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt wegen

$$H_g(x,y) = \mathrm{e}^{xy} \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}, \quad H_g(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und damit $\tilde{y}''(0) = -\frac{\partial_x^2 g(P_2)}{\partial_y g(P_2)} = 1$. Bis zur zweiten Ordnung ist also

$$\tilde{y}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$



(vii) Parametrisierung: Setze $t = x + y$, $y = t - x$. Dann ist

$$g(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x(t-x)} = t,$$

wobei $t > 0$ sein muss. Durch Logarithmieren erhält man weiter

$$g(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t-x) = \log t \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - tx + \log t = 0$$

und damit

$$x_{1,2} = \frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} - \log t} \quad \wedge \quad y = t - x.$$

Für die beiden Kurven $\gamma_{1,2} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_{1,2}(t) = \frac{t}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - \log t}\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$$

gilt also $N = \operatorname{spur}\gamma_1 \cup \operatorname{spur}\gamma_2$. Offenbar ist $\gamma_1(1) = P_1$, $\gamma_2(1) = P_2$. Wegen

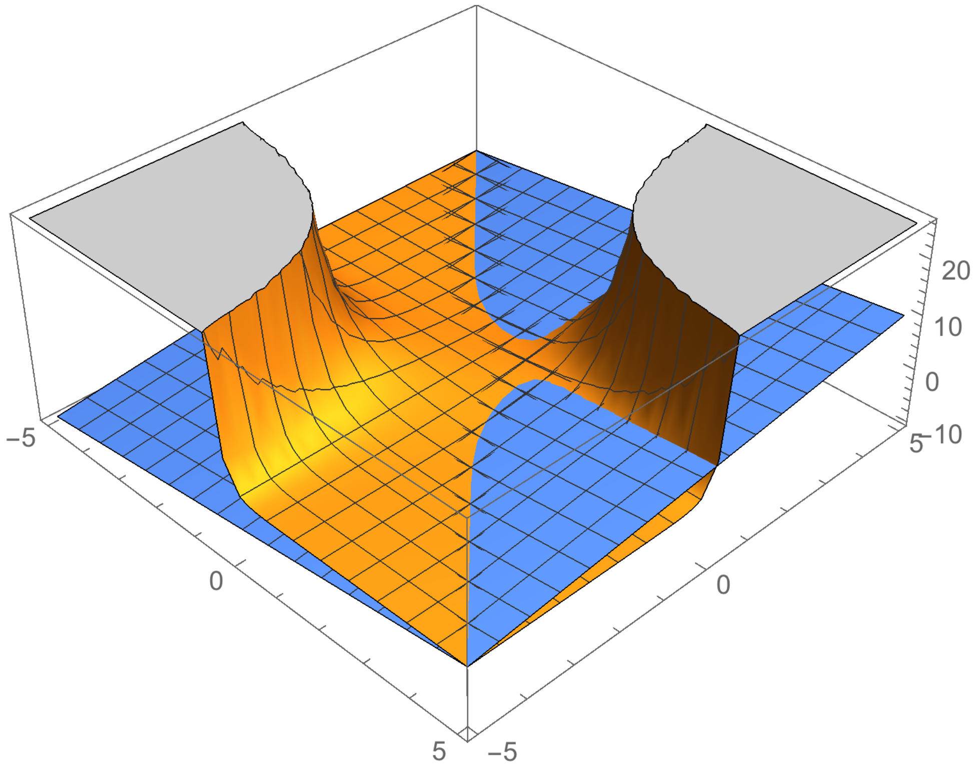
$$\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} - \log t} = \frac{t}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\log t}{t^2}}\right) \sim \frac{\log t}{t} \quad (t \to \infty)$$

gilt die Asymptotik

$$\gamma_1(t) \sim \begin{pmatrix} t \\ \frac{\log t}{t} \end{pmatrix}, \quad t \gg 1$$

und

$$\gamma_1(t) \sim \begin{pmatrix} \sqrt{-\log t} \\ -\sqrt{-\log t} \end{pmatrix}, \quad t \ll 1.$$



(b) Extremwerte der Funktion F kann man wegen (a) (v) mithilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren finden. Diese führt auf die Gleichungen $g(x,y)=0$ und $\nabla F(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$, also

$$x=\lambda(y\mathrm{e}^{xy}-1) \tag{8}$$
$$y=\lambda(x\mathrm{e}^{xy}-1) \tag{9}$$
$$\mathrm{e}^{xy}=x+y \tag{10}$$

für die drei Unbekannten $x,y,\lambda\in\mathbb{R}$. Man bemerke, dass $\lambda\neq 0$ wegen $\mathrm{e}^{xy}>0$.

Setzt man (10) in (8) und (9) ein, so ergibt sich

$$x=\lambda(y^2+xy-1)$$
$$y=\lambda(x^2+xy-1).$$

Addition und Subtraktion dieser Gleichungen liefert

$$x+y=\lambda(x^2+2xy+y^2-2)=\lambda((x+y)^2-2) \tag{11}$$
$$x-y=\lambda(y^2-x^2)=\lambda(y-x)(y+x) \tag{12}$$

Gleichung (11) besitzt wegen $x+y=\mathrm{e}^{xy}>0$ die eindeutige Lösung $x+y=\frac{1}{2\lambda}+\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}+2}$. Sei nun $x\neq y$ (wegen (a) (iii) ist dies auf N immer der Fall). Dann liefert Gleichung (12) $x+y=-\frac{1}{\lambda}$, zusammen also

$$-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2\lambda}+\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}+2} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{3}{2}\frac{1}{\lambda}=\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}+2},$$

mit der eindeutigen Lösung $\lambda=-1$. Mit der Nebenbedingung (10) folgt dann

$$x+y=-\frac{1}{\lambda}=1=\mathrm{e}^{xy},$$

also $x = 0$ oder $y = 0$. Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems (8)-(10) sind also gerade die Punkte $P_{1,2}$.

Insgesamt erhält man die beiden (globalen) Minima $F(P_{1,2}) = \frac{1}{2}$. Dass es sich um globale Minima handelt, sieht man zum Beispiel durch Betrachtung von $F_\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$F_\gamma(t) := F(\gamma_{1,2}(t)) = \frac{t^2}{2} - \log t.$$

$F_\gamma(t) \to \infty$ für $t \to 0$ und $t \to \infty$ und wegen $F'_\gamma(t) = t - \frac{1}{t} = 0$ genau dann wenn $t = 1$, und $h''(t) = 1 + t^{-2} > 0$ für alle t, hat F_γ ein globales Minimum bei $t = 1$.

Aufgabe 39 (Übung)

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w})$,

(b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}$.

HINWEIS: Verwenden Sie

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e_k}, \quad \nabla \times \vec{v} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \partial_i v_j \vec{e_k}$$

mit dem Levi-Civitá-Symbol

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine gerade Permutation von (123) ist,} \\ -1, & \text{falls } (ijk) \text{ eine ungerade Permutation von (123) ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

(Alle Summen gehen von 1 *bis* 3*)*

(a) Unter Verwendung der Linearität der Ableitung und der Produktregel erhält man

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \sum_k \partial_k (\vec{v} \times \vec{w})_k = \sum_k \partial_k \left(\sum_{ij} \epsilon_{ijk} v_i w_j \right) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_k (v_i w_j) \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} (\partial_k v_i) w_j + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} (\partial_k w_j) v_i \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{kij} (\partial_k v_i) w_j - \sum_{ijk} \epsilon_{kji} (\partial_k w_j) v_i \\ &= \sum_j (\nabla \times v)_j w_j - \sum_i (\nabla \times w)_i v_i = \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w}), \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile die Permutationseigenschaften des Levi-Civitá-Symbols verwendet wurden.

(b) Es gilt für $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \vec{v})]_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \partial_i (\nabla \times \vec{v})_j = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \partial_i \left(\sum_{mn} \epsilon_{mnj} \partial_m v_n \right) \\ &= \sum_{imn} \left(\sum_j \epsilon_{kij} \epsilon_{jmn} \right) \partial_i \partial_m v_n \\ &= \sum_{imn} (\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}) \partial_i \partial_m v_n \\ &= \sum_i \partial_i \partial_k v_i - \sum_i \partial_i^2 v_k \end{aligned}$$

Dabei wurde die Identität aus dem Hinweis verwendet. Nach dem Lemma von Schwarz ($\vec{v} \in C^2$!) vertauschen die partiellen Ableitungen und mit der Definition des Laplace-Operators $\Delta = \sum_i \partial_i^2$ folgt nun

$$[\nabla \times (\nabla \times \vec{v})]_k = \partial_k \left(\sum_i \partial_i v_i \right) - \Delta v_k,$$

und damit

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}.$$

Aufgabe 40 (Tutorium)

(a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(1,0,0)$ von der durch die Gleichung $x+y-z=0$ gegebenen Ebene.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) := 4x^2 - 3xy \quad \text{für } (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

auf der Einheitskreisscheibe $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$.

Lösungsvorschlag

(a) Der minimale Abstand der Ebene vom Punkt $\vec{P}=(1,0,0)$ ist $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(i) *Geometrisch:* Der Einheitsnormalenvektor der Ebene ist $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. Der Abstand von $\vec{P}=(1,0,0)$ zur Ebene ist $|\vec{P}\cdot\vec{n}|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii) *Parametrisieren:* Wir lösen die Nebenbedingung auf, $z=x+y$, und minimieren anstelle der Abstandsfunktion $f(x,y,z)=\|x-P\|^2=(x-1)^2+y^2+z^2$ die Funktion

$$\tilde{f}(x,y)=f(x,y,x+y)=(x-1)^2+y^2+(x+y)^2.$$

Es ist

$$\nabla\tilde{f}(x,y)=\begin{pmatrix}4x+2y-2\\2x+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

genau dann, wenn $(x,y)=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$. Die Hessematrix von $\tilde{f}$,

$$H_{\tilde{f}}(x,y)=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix},$$

ist wegen $\det H_{\tilde{f}}(x,y)=12>0$ und $\operatorname{tr} H_{\tilde{f}}(x,y)=8>0$ positiv definit. Damit besitzt $\tilde{f}$ ein lokales Minimum in $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$, welches wegen $\tilde{f}(x,y)\to\infty$ für $\|(x,y)\|\to\infty$ ein globales Minimum ist. Der minimale Abstand des Punktes $\vec{P}$ zur Ebene wird also in $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=x+y=\frac{1}{3}$ angenommen und beträgt

$$\left\|\vec{P}-\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\|=\sqrt{\tilde{f}\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(iii) *Lagrangemultiplikator:* Minimiere $f(x,y,z)=\|\vec{x}-P\|^2=(x-1)^2+y^2+z^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z)=x+y-z=0$.
Wegen $\nabla g(x,y,z)=(1,1,-1)^T\neq 0$ gibt es nach dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren für jedes lokale Extremum (x_0,y_0,z_0) von f unter der Nebenbedingung $g=0$ einen Lagrange-Multiplikator $\lambda\in\mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0).$$

Dies führt auf die 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_0 - 2 &= \lambda \\ 2y_0 &= \lambda \\ 2z_0 &= -\lambda \\ x_0 + y_0 - z_0 &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält $x_0 = \frac{\lambda+2}{2}$, $y_0 = \frac{\lambda}{2}$, $z_0 = -\frac{\lambda}{2}$ und eingesetzt in die Nebenbedingung

$$\frac{\lambda+2}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda+2}{2} = 0,$$

also $\lambda = -\frac{2}{3}$. Somit wird das Minimum im Punkt $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ angenommen mit dem oben schon berechneten Abstand $\frac{1}{\sqrt{3}}$ von $\vec{P}$.

(b) Wir untersuchen $f \in C^2(\mathbb{R}^2, R)$ zunächst auf lokale Extremstellen in $U_1(0)$. Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

und für die Hessematrix von f

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch $A := H_f(0,0)$ definiert sei. Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(8-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda + 1).$$

Somit sind die Eigenwerte von A gegeben durch 9 und -1, wodurch die Matrix indefinit ist. f hat somit in $(0,0)$ kein lokales Extremum.

Wir stellen fest, dass f auf D sein Maximum und Minimum annimmt, da D abgeschlossen und beschränkt ($\|(x,y)\| \leqslant 1$) und daher kompakt ist. Für die lokalen Extrema auf

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

nutzen wir die Multiplikatorenregel von Lagrange aus. Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Dann ist $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $T = \varphi^{-1}(\{0\})$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion h abgeschlossen. Wegen $\|(x,y)\| = 1$ für $(x,y) \in T$ ist T auch beschränkt und daher kompakt, wodurch f auf T sein Maximum und Minimum annimmt. Es gilt

$$\varphi'(x,y) = (2x, 2y),$$

wodurch φ' auf ganz T vollen Rang hat, da $(0,0) \notin T$. Für jedes lokale Extremum (x_0, y_0) von f auf T (also $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$) existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$f'(x_0, y_0) = -\lambda_0 \varphi'(x_0, y_0),$$

womit sich die Gleichungen

$$8x_0 - 3y_0 = -2\lambda_0 x_0, \tag{13}$$

$$-3x_0 = -2\lambda_0 y_0 \tag{14}$$

und

$$x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0 \tag{15}$$

ergeben. Umgeformt ergibt sich aus (13) und (14)

$$(8 + 2\lambda_0)x_0 - 3y_0 = 0 \quad \text{und} \tag{16}$$

$$x_0 = \frac{2}{3}\lambda_0 y_0. \tag{17}$$

Einsetzen von (17) in (16) liefert

$$\frac{y_0}{3}(4\lambda_0^2 + 16\lambda_0 - 9) = 0.$$

Wäre $y_0 = 0$, so nach (17) auch x_0. Dies widerspricht jedoch (15). Somit muss der Klammerausdruck 0 ergeben, was genau für $\lambda_0 \in \{\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\}$ der Fall ist. Einsetzen in (17) und danach in (15) ergibt die vier Punkte

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \qquad \left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Durch Einsetzen der Punkte erkennen wir

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$f\left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{9}{2}.$$

Da f auf $D \setminus T$ keine lokalen Extrema besitzt, ergibt sich schließlich:

Lokale Minima von f auf D: $(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}})$.

Lokale Maxima von f auf D: $(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \mp\frac{1}{\sqrt{10}})$.

Aufgabe 41 (Tutorium)

Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 5x + y - 3z$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ auf der Menge

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x + y + z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Sei $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Klar: $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $S = G^{-1}(\{\vec{0}\})$. Da G stetig ist und $\{\vec{0}\}$ abgeschlossen, ist S abgeschlossen. Wegen $\|(x, y, z)\| = 1$ für jedes $(x, y, z) \in S$, ist S beschränkt. Nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung ist also S kompakt. Ebenfalls nach Abschnitt 19.17 der Vorlesung, existieren ein $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in S$ mit

$$f(\vec{v}_1) \leq f(\vec{v}) \leq f(\vec{v}_2)$$

für alle $\vec{v} \in S$. Damit ist die Existenz der globalen Extrema von f auf S gesichert.
Da jede Stelle eines globalen Extremums auch eine Stelle eines lokalen Extremums ist, bietet es sich an diese mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange (vgl. Abschnitt 19.19 der Vorlesung) zu identifizieren: Es ist

$$G'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Also kann $G'(x, y, z)$ nur für $x = y = z$ nicht den vollen Rang haben. Aber für jedes $(x, y, z) \in S$ gilt $x = y = z \Rightarrow x = y = z = 0$, was ein Widerspruch zu $\|(x, y, z)\| = 1$ darstellt. Also hat G' auf S den vollen Rang 2. Es existiert $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f'(\vec{v}_i) = \vec{\lambda}^T G'(\vec{v}_i)$$

für $i \in \{1, 2\}$. Zusammen mit der Nebenbedingung $G(\vec{v}_i) = 0$, ergibt es die folgenden fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} 5 &= \lambda_1 + 2x\lambda_2 & (18) \\ 1 &= \lambda_1 + 2y\lambda_2 & (19) \\ -3 &= \lambda_1 + 2z\lambda_2 & (20) \\ 0 &= x + y + z & (21) \\ 1 &= x^2 + y^2 + z^2 & (22) \end{aligned}$$

Addition von (18), (19) und (20), sowie Ausnutzung von (21) liefert $3 = 3\lambda_1$, also

$$\lambda_1 = 1. \tag{23}$$

Einsetzen in (18) impliziert $2 = x\lambda_2$, also $\lambda_2 \neq 0$. Einsetzen von (23) in (19) liefert

$$y = 0. \tag{24}$$

Mit (21) folgt dann sofort

$$z = -x. \tag{25}$$

Durch (22) folgt

$$x \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}. \tag{26}$$

Es ist also

$$\vec{v}_i \in \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

für $i \in \{1, 2\}$. Es ist $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}$ und $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$, also

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\ \vec{v}_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 42 (Tutorium)

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} + (\nabla \cdot \vec{w})\vec{v} - (\nabla \cdot \vec{v})\vec{w}$,

(b) $\nabla(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})$.

Bemerkung: Auf der rechten Seite bedeutet $\vec{v} \cdot \nabla = v_1\partial_1 + v_2\partial_2 + v_3\partial_3$ und wirkt in $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}$ auf jede Komponente von $\vec{w}$ etc.

Lösungsvorschlag

(a) Für $k = 1, 2, 3$ gilt

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w})]_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk}\partial_i(\vec{v} \times \vec{w})_j = \sum_{ij} \epsilon_{ijk}\partial_i \left(\sum_{mn} \epsilon_{mnj} v_m w_n \right) \\
&= \sum_{imn} \left(\sum_j \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnj} \right) \partial_i(v_m w_n) = \sum_{imn} \left(\sum_j \epsilon_{kij}\epsilon_{jmn} \right) \partial_i(v_m w_n) \\
&= \sum_{imn} (\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im})\partial_i(v_m w_n) = \sum_i \partial_i(v_k w_i - v_i w_k) \\
&= \sum_i \left[v_k(\partial_i w_i) + w_i(\partial_i v_k) - w_k(\partial_i v_i) - v_i(\partial_i w_k) \right] \\
&= (\nabla \cdot \vec{w})v_k + (\vec{w} \cdot \nabla)v_k - (\nabla \cdot \vec{v})w_k - (\vec{v} \cdot \nabla)w_k
\end{aligned}$$

und damit

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} + (\nabla \cdot \vec{w})\vec{v} - (\nabla \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

(b) Zunächst ist für $k = 1, 2, 3$,

$$[\nabla(\vec{v} \cdot \vec{w})]_k = \partial_k \sum_i v_i w_i = \sum_i w_i(\partial_k v_i) + \sum_i v_i(\partial_k w_i).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
[\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})]_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} w_i \sum_{mn} \epsilon_{mnj}\partial_m v_n = \sum_{imn} (\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}) w_i \partial_m v_n \\
&= \sum_i w_i \partial_k v_i - \sum_i w_i \partial_i v_k = \sum_i w_i \partial_k v_i - (\vec{w} \cdot \nabla)v_k
\end{aligned}$$

und analog

$$[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{w})]_k = \sum_i v_i \partial_k w_i - (\vec{v} \cdot \nabla)w_k.$$

Zusammengefasst erhält man also

$$\begin{aligned}
[\nabla(\vec{v} \cdot \vec{w})]_k &= [\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})]_k + (\vec{w} \cdot \nabla)v_k + [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{w})]_k + (\vec{v} \cdot \nabla)w_k \\
&= [\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})]_k + [(\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v}]_k + [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{w})]_k + [(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}]_k\,.
\end{aligned}$$

Hinweis zur Klausuranmeldung

- Am Montag, den 18.09.2017 von 13:00 bis 15:00 findet die Klausur in Höherer Mathematik II für die Fachrichtung Physik statt.
- Teilnahme an der Klausur erfordert eine vorherige **Anmeldung**. Studenten in den Bachelor-Studiengängen können sich im *Onlineportal Campus Management* für Studierende anmelden.
- **Anmeldeschluss** ist **Samstag, der 29.07.2017**. Spätere Anmeldungen können leider nicht mehr berücksichtigt werden. Es wird empfohlen, den Erfolg der Anmeldung im Onlinesystem zu **überprüfen** und zu **dokumentieren** (z.B. mittels eines Screenshots).