Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
14.06.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 43 (Übung)
Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt $A(D) = \iint_D \mathrm{d}(x,y)$ der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$, wobei

(a) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$,

(b) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\right\}$ und

(c) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ ax^2 + y \leq b\right\}$.

Aufgabe 44 (Übung)

(a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und berechnen Sie den Integralwert.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}(x,y)$, $A = [0,1]^2$

(ii) $\int_B xy^2 \,\mathrm{d}(x,y)$, $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$

Aufgabe 45 (Übung)

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\, ds$ für

(i) $r > 0$ und $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ sowie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \arccos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{y}{r}$.

(ii) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2\arctan(t) - t + 3 \end{pmatrix}$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := ye^{-x}$.

(b) Überprüfen Sie jeweils, ob $\vec{F}$ auf dem Definitionsbereich ein Potentialfeld ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Potentialfunktion.

(i) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$.

(ii) $\vec{F} : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ z > 0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ ze^x \\ xy\ln(z) \end{pmatrix}$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 46 (Tutorium)

(a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, dx dy$ und berechnen Sie den Integralwert.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, \mathrm{d}(x,y)$, $A = [1,2] \times [3,4]$,

(ii) $\int_B y \sin(xy) \, \mathrm{d}(x,y)$, $B = [0,1] \times [0,\pi/2]$,

(iii) $\int_B \sin(x+y) \, \mathrm{d}(x,y)$, $B = [0,\pi]^2$

Aufgabe 47 (Tutorium)

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x) \, \mathrm{d}s$ für

(i) $r > 0$ und $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := y$.

(ii) $\gamma : [0, \ln(5)] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x$.

(b) Überprüfen Sie jeweils, ob $\vec{F}$ auf dem Definitionsbereich ein Potentialfeld ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Potentialfunktion.

(i) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} e^y + \cos(x)\cos(y) \\ xe^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$.

(ii) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 48 (Tutorium)

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

(a) $\vec{F}(x,y,z) = e^{-xz}(2x - x^2z - 5zy^3, 15y^2, -x^3 - 5xy^3)$, $\gamma(t) = (t^3, t^2 - t, \sin(\pi t))$, $t \in [0,1]$

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (y, -z, x)$, $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t))$, $t \in [0, \ln(2)]$