**Institut für Analysis**
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
16.06.2017

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

**Aufgabe 43:** (Übung)
Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt $A(D) = \iint_D \mathrm{d}(x,y)$ der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$, wobei

(a) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$,

(b) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\right\}$ und

(c) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ ax^2 + y \leq b\right\}$.

### Lösungsvorschlag

*Teil (a) :* Nach Definition gilt für jedes Rechteck $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $D \subseteq R$

$$\iint_D \mathrm{d}(x,y) = \iint_R \chi_D(x,y)\ \mathrm{d}(x,y)$$

wobei $\chi_D(x,y) = 0$ falls $(x,y) \in R \backslash D$ und $\chi_D(x,y) = 1$ falls $(x,y) \in D$. Für $(x,y) \in D$ gilt weiter $y = 0 \Leftrightarrow |x| \leq a$, das heißt die Menge $D$ ist von der Form $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a,\ y \in [-h(x), h(x)]\right\}$ wobei $h(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ für $|x| < a$ gilt. Nach Satz 2 in Abschnitt 20.5 der Vorlesung existiert das Integral daher und

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}(x,y) &= \int_{-a}^{a} \int_{-h(x)}^{h(x)} dydx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\ dx = 2ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - z^2}\ dz = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\phi)\ d\phi \\ &= ab[\phi + \cos(\phi)\sin(\phi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.\end{aligned}$$

wobei jeweils mit $x = za$ und $z = \sin(\phi)$ substituiert wurde.

*Teil (b) :* Die Menge $D$ ist eine Differenzmenge der Kreise mit Radius $b$, beziehungsweise $a$. Auf Grund der Symmetrie dieser Menge sehen wir mit der Definition des Integrals ein, dass

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}(x,y) &= \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} \chi_D(x,y)\ dxdy = \int_{-b}^{0} \int_{-b}^{b} \chi_D(x,y)\ dxdy + \int_{0}^{b} \int_{-b}^{b} \chi_D(x,y)\ dxdy \\ &= 2\int_{0}^{b} \int_{-b}^{b} \chi_D(x,y)\ dxdy = 2\iint_{D \cap \{y \geq 0\}} d(x,y).\end{aligned}$$

Damit genügt es, die Fläche von $D \cap \{y \geq 0\}$ zu bestimmen. Ein Tupel $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \leq a$ liegt in $D \cap \{y \geq 0\}$, falls $\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{b^2 - x^2}$ gilt. Falls $a \leq |x| \leq b$ gilt, so liegt $(x,y) \in D \cap \{y \geq 0\}$ genau dann, wenn $0 \leq y \leq \sqrt{b^2 - x^2}$ gilt. Das heißt $D \cap \{y \geq 0\}$ ist erneut von der Form $D \cap \{y \geq 0\} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a,\ y \in [\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{b^2 - x^2}]\Big\} \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq |x| \leq b,\ y \in [0, \sqrt{b^2 - x^2}]\Big\}$.

Damit gilt nach Satz 2 in Abschnitt 20.5 der Vorlesung

$$\begin{aligned}\iint_{D \cap \{y \geq 0\}} d(x,y) &= \int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\ dx + 2\int_{a}^{b} \sqrt{b^2 - x^2}\ dx \\ &= \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 - x^2}\ dx - \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = (b^2 - a^2)\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

wobei erneut wie in Teil (a) substituiert wurde. Es folgt nun $A(D) = \pi(b^2 - a^2)$. Wir können außerdem den Flächeninhalt (einfacher) direkt mit Teil (a) berechnen, indem wir einsehen, dass

$$\iint_D \mathrm{d}(x,y) = \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} \chi_{D_1}(x,y)\ dxdy - \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} \chi_{D_2}(x,y)\ dxdy = \iint_{D_1} \mathrm{d}(x,y) - \iint_{D_2} \mathrm{d}(x,y)$$

wobei $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq b^2\}$ und $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Die Berechnung folgt dann aus Teil(a) mit übereinstimmenden Achsenlängen der Ellipsen (Kreis).

*Teil (c):* $A(D)$ berechnet den Flächeninhalt der Menge, die vom Graphen der quadratischen Funktion $f(x) = b - ax^2,\ x \in \left[-\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right]$ und der Achse $\{y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eingeschlossen wird. Das heißt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \sqrt{\frac{b}{a}},\ y \in [0, b - ax^2]\}$. Damit folgt

$$\iint_D d(x,y) = \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} b - ax^2\ dx = 2b\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{2a}{3}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

## Aufgabe 44: (Übung)

(a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und berechnen Sie den Integralwert.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}(x,y),\ A = [0,1]^2$

(ii) $\int_B xy^2\ \mathrm{d}(x,y),\ B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\big\}$

## Lösungsvorschlag

(a) Wir setzen

$$B \ := \ \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq y^2 + 1\big\}.$$

Das heißt ist $(x,y) \in B$, so gilt für $x \in [0,1]$ nur die Bedingung $0 \le y \le x \le 1$, denn $y^2+1 \ge 1$. Andererseits gilt auch $y^2+1 \in [1,2]$, denn $y \in [0,1]$. Ist daher $x \in [1,2]$ so gilt für $y \in [0,1]$ die Bedingung $\sqrt{x-1} \le y \le 1$.

Insgesamt gilt somit

$$B = \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 1\right\}}_{=B_1} \cup \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x \le 2) \wedge (\sqrt{x-1} < y \le 1)\right\}}_{=B_2}.$$

Ferner ist $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Es folgt aus Abschnitt 20.5 der Vorlesung

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_B x^2 y \mathrm{d}(x,y) = \int_{B_1} x^2 y \mathrm{d}(x,y) + \int_{B_2} x^2 y \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x x^2 y \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4}{2} \mathrm{d}x + \int_1^2 x^2 \frac{1-(x-1)}{2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{10} + \frac{8}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{67}{120}.
\end{aligned}$$

(b) (i) Es gilt nach Satz 1 in Abschnitt 20.5 der Vorlesung

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = -\int_0^1 \left[\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}x \\
&= [\operatorname{arsinh}(x)]_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}x \\
&\overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} \operatorname{arsinh}(1) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}y = \operatorname{arsinh}(1) - [\operatorname{arsinh}(y)]_{y=0}^{y=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\
&= \operatorname{arsinh}(1) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Hier wurde für $x \mapsto \operatorname{arsinh}(x)$ für $x \in [0,1]$ die Stammfunktion $\int \operatorname{arsinh}(x)\, dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$ verwendet.

(ii) Es gilt nach Satz 2 in Abschnitt 20.5 der Vorlesung, da die Schnittpunkte der Geraden $y = \pm x$ mit dem Einheitskreis jeweils $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ betragen

$$\iint_B xy^2\, d(x,y) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \int_{-x}^{x} y^2\, dy\, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy\, dx = \frac{2}{15}\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{15}\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{15\sqrt{2}}.$$

**Aufgabe 45:** (Übung)

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\ ds$ für

   (i) $r > 0$ und $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ sowie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \arccos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{y}{r}$.

   (ii) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2\arctan(t) - t + 3 \end{pmatrix}$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := ye^{-x}$.

(b) Überprüfen Sie jeweils, ob $\vec{F}$ auf dem Definitionsbereich ein Potentialfeld ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Potentialfunktion.

   (i) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xz \\ z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \end{pmatrix}$.

   (ii) $\vec{F} : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2y \\ ze^x \\ xy\ln(z) \end{pmatrix}$.

## Lösungsvorschlag

(a) (i) Es gilt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0,\pi].$$

Somit folgt $\|\dot\gamma(t)\| = r$ für alle $t \in [0,\pi]$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x)\mathrm{d}s &= \int_0^\pi f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = r\int_0^\pi \arccos(\cos(t)) + \sin(t)\ dt \\ &= r[\frac{t^2}{2} - \cos(t)]_{t=0}^\pi = r(\frac{\pi^2}{2} + 2).\end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2}{1+t^2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0,1].$$

Somit folgt $\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}} = 1$ für alle $t \in [0,1]$ und für das gesuchte Integral folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x)\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2\arctan(t) - t + 3)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 2\cdot\frac{1}{1+t^2}\arctan(t) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= [(\arctan(t))^2 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + 3\arctan(t)]_{t=0}^1 = \frac{1}{16}(\pi^2 + 12\pi - 8\ln(2)).\end{aligned}$$

(b) (i) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2+2xz \\ z^2+2xy \\ x^2+2yz \end{pmatrix}$ hat auf $\mathbb{R}^3$ die Potentialfunktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2$.

Wir werden diese Funktion nun berechnen. Das folgende Vorgehen ist dabei aber nicht als formal korrekte Rechnung zu verstehen, vielmehr soll es veranschaulichen wie man einen Kandidaten für die Potentialfunktion ermittelt. Gesucht ist eine Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\nabla F)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \vec{F}_1(x,y,z) \\ \vec{F}_2(x,y,z) \\ \vec{F}_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $\vec{F}_i$ für $i \in \{1,2,3\}$ die Komponentenfunktionen von $\vec{F}$ darstellen. Dies schreiben wir in das Gleichungssystem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = y^2 + 2xz, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = z^2 + 2xy, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x^2 + 2yz. \tag{3}$$

Integriert man (1) in der $x$-Variablen, erhält man

$$F(x,y,z) = \int \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)dx = \int y^2 + 2xzdx = xy^2 + x^2z + c_1(y,z),$$

wobei die Konstante $c_1(y,z)$ von $y$ und $z$ abhängen kann, da wir nur in $x$ integrieren und diesbezüglich $y$ und $z$ als "Konstanten" einzustufen sind. Integrieren wir (2) nach $y$ und (3) nach $z$ erhalten wir

$$F(x,y,z) = xy^2 + c_2(x,z) + yz^2 \quad \text{und} \quad F(x,y,z) = c_3(x,y) + x^2z + yz^2.$$

An dieser Stelle vergleicht man die drei Gleichungen für $F(x,y,z)$ und wird feststellen, dass

$$c_1(y,z) = yz^2 \quad \text{und} \quad c_2(x,z) = x^2z \quad \text{und} \quad c_3(x,y) = xy^2$$

eine Möglichkeit ist, diese Gleichungen zu erfüllen. Unser Kandidat lautet daher $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2$.

Dann ist $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(\nabla F)(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2+2xz \\ z^2+2xy \\ x^2+2yz \end{pmatrix} = \vec{F}(x,y,z).$$

Folglich ist $F$ die gesuchte Potentialfunktion.

(ii) Das Vektorfeld $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$ mit $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\}$ und $\vec{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2y \\ ze^x \\ xy\ln(z) \end{pmatrix}$ ist auf $D$ kein Potentialfeld.

Zunächst ist zu bemerken, dass $D$ ein Gebiet ist und $\vec{F} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ gilt. Für $(x, y, z) \in D$ gilt

$$\vec{F}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ ze^x & 0 & e^x \\ y\ln(z) & x\ln(z) & \frac{xy}{z} \end{pmatrix}$$

und damit ist $\vec{F}'(x, y, z)$ nicht symmetrisch. Nach Vorlesung (Abschnitt 20.4) ist $\vec{F}$ daher kein Potentialfeld auf $D$, da die Verträglichkeitsbedingungen nicht erfüllt sind.

**Aufgabe 46:** (Tutorium)

(a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ und berechnen Sie den Integralwert.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\ \mathrm{d}(x,y),\ A = [1,2] \times [3,4],$

(ii) $\int_B y\sin(xy)\ \mathrm{d}(x,y),\ B = [0,1] \times [0,\pi/2],$

(iii) $\int_B \sin(x+y)\ \mathrm{d}(x,y),\ B = [0,\pi]^2$

## Lösungsvorschlag

(a) Es gilt nach Satz 2 in Abschnitt 20.5 der Vorlesung:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, y\in[0,1],\ y\le x\le 1\}} e^{x^2}\ \mathrm{d}(x,y) = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, x\in[0,1],\ 0\le y\le x\}} e^{x^2}\ \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x e^{x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e-1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Es sei zunächst zu bemerken, dass der Integrand in allen drei Fällne $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ stetig ist. Damit können wir jeweils Satz 1 aus Abschnitt 20.5 der Vorlesung anwenden. Es gilt daher

(i)

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{1}{(x+y)^2}\ d(x,y) &= \int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_1^2 \left[\frac{1}{x+y}\right]_{y=3}^{y=4} \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+4}\mathrm{d}x = [\ln(x+3)]_{x=1}^{x=2} - [\ln(x+4)]_{x=1}^{x=2} \\
&= \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \ln\left(\frac{6}{5}\right) = \ln\left(\frac{25}{24}\right).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\int_B y\sin(xy) dxy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 y\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(xy)]_{x=0}^1 \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(y)\mathrm{d}y \\
= [y - \sin(y)]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\int_D \sin(x+y)\ d(x,y) &= \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi [-\cos(x+y)]_{x=0}^{\pi}\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi \cos(y) - \cos(\pi+y)\ \mathrm{d}y = 2\int_0^\pi \cos(y)\ \mathrm{d}y = 2[\sin(y)]_{y=0}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 47:** (Tutorium)

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}s$ für

(i) $r > 0$ und $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := y$.

(ii) $\gamma : [0, \ln(5)] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := x$.

(b) Überprüfen Sie jeweils, ob $\vec{F}$ auf dem Definitionsbereich ein Potentialfeld ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Potentialfunktion.

(i) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{F}(x, y) := \begin{pmatrix} e^y + \cos(x)\cos(y) \\ xe^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$.

(ii) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$.

## Lösungsvoschlag

(a) (i) Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, \pi].$$

Somit folgt $\|\dot{\gamma}(t)\| = r$ für alle $t \in [0, \pi]$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\int_\gamma f(x)\mathrm{d}s = \int_0^\pi f(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, \mathrm{d}t = r^2 \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t = r^2[-\cos(t)]_{t=0}^{\pi} = 2r^2.$$

(ii) Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{2}\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \forall t \in [0, \ln(5)].$$

Somit folgt $\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{\mathrm{e}^t}{2}\sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2 + 2} = \mathrm{e}^t$ und für das gesuchte Integral ergibt sich

$$\int_\gamma f(x)\mathrm{d}s = \int_0^{\ln(5)} f(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(5)} \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t.$$

Es gilt

$$\int \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t \overset{P.I.}{=} \mathrm{e}^{2t}\sin(t) - 2\int \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\mathrm{d}t \overset{P.I.}{=} \mathrm{e}^{2t}\sin(t) + 2\,\mathrm{e}^{2t}\cos(t) - 4\int \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t,$$

wodurch sich

$$\int \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{5}(\sin(t) + 2\cos(t))$$

ergibt. Damit folgt also

$$\int_\gamma f(x)\mathrm{d}s = \frac{1}{10}[\mathrm{e}^{2t}(\sin(t) + 2\cos(t)]_{t=0}^{\ln(5)} = \frac{5}{2}(\sin(\ln(5)) + 2\cos(\ln(5))) - \frac{1}{5}.$$

(b) (i) Das Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} e^y + \cos(x)\cos(y) \\ xe^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$ ist auf $\mathbb{R}^2$ ein Potentialfeld und hat die (bis auf Addition von Konstanten eindeutige) Potentialfunktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\Phi(x,y) := xe^y + \sin(x)\cos(y)$.

Da $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, dass

$$(\nabla\Phi)(x,y) = \begin{pmatrix} e^y + \cos(x)\cos(y) \\ xe^y - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} = \vec{F}(x,y)$$

ist $\Phi$ tatsächlich die gesuchte Potentialfunktion. Ähnlich wie in der Übung kann man dabei zunächst die notwendige Bedingung $\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = \vec{F}_1(x,y) = e^y + \cos(x)\cos(y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ durch bilden der Stammfunktion in $x$ überprüfen. Das heißt, unter der Bedingung dass $\vec{F}$ ein Potentialfeld ist, gilt

$$\Phi(x,y) = xe^y + \int \cos(x)\cos(y)\ dx + C(y) = xe^y + \sin(x)\cos(y) + C(y)$$

Durch die Gleichung $\vec{F}_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = xe^y - \sin(x)\sin(y) + C'(y)$ erhält man die Unabhänbgigkeit der Konstante $C$ von $(x,y)$.

(ii) Das Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2xyz^3 \\ 2y + x^2z^3 \\ y^2 + 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$ ist kein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^3$.

Zunächst sei zu bemerken, dass $\mathbb{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet ist und $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt. Weiter gilt für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2yz^3 & 2y + 2xz^3 & 6xyz^2 \\ 2xz^3 & 2 & 3x^2z^2 \\ 6xyz^2 & 2y + 3x^2z^2 & 6x^2yz \end{pmatrix}.$$

Dies ist jedoch keine symmetrische Matrix und daher sind die Verträglichkeitsbedingungen (Abschnitt 20.4, Satz 2) auf $\mathbb{R}^3$ nicht erfüllt. Damit hat $\vec{F}$ also keine Potentialfunktion.

**Aufgabe 48:** (Tutorium)
Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

(a) $\vec{F}(x,y,z) = e^{-xz}(2x - x^2z - 5zy^3, 15y^2, -x^3 - 5xy^3)$, $\gamma(t) = (t^3, t^2 - t, \sin(\pi t))$, $t \in [0,1]$

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (y, -z, x)$, $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t))$, $t \in [0, \ln(2)]$

## Lösungsvorschlag

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial y}(x,y,z) &= -15y^2ze^{-xz} = \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x}(x,y,z)\\
\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial z}(x,y,z) &= (-3x^2-5y^3+x^3z+5xy^3z)e^{-xz} = \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial x}(x,y,z)\\
\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial z}(x,y,z) &= -15xy^2 = \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial y}(x,y,z)
\end{aligned}$$

für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und $\vec{F}$ ein $C^1$-Vektorfeld ist, gilt nach Abschnitt 20.4 der Vorlesung, dass $\vec{F}$ ein Potentialfeld ist. Also hängt der Wert des Integrals nicht von dem konkreten Weg, sondern nur von den Randpunkten ab. Es ist

$$\gamma(0) = (0,0,0), \quad \gamma(1) = (1,0,0).$$

Wähle also $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (t,0,0)$. Es gilt:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_0^1 \vec{F}(\tilde{\gamma}(t))\cdot\dot{\tilde{\gamma}}(t)dt = \int_0^1 2tdt = \left[t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 1.$$

(b) Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{ds} &= \int_0^{\ln(2)} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)dt\\
&= \int_0^{\ln(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t))\cdot(\cosh(t), \sinh(t), \cosh(t))dt\\
&= \int_0^{\ln(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \sinh(t)\cosh(t)dt\\
&= \int_0^{\ln(2)} 1 + \sinh(t)\cosh(t)dt = \ln(2) + \frac{1}{2}\left[\sinh^2(t)\right]_{t=0}^{t=\ln(2)} = \ln(2) + \frac{9}{32}.
\end{aligned}$$

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2017s/