Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
21.06.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 49 (Übung)

(a) Sei $B(0,r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\|^2 < r^2\}$ eine offene Kugel mit Radius $r > 0$. Betrachten Sie die Funktionenfamilie $(\varphi_\sigma)_{\sigma>0}$, welche durch

$$\varphi_\sigma(\vec{x}) = \frac{e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2\sigma}}}{\sqrt{(2\pi\sigma)^3}}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\sigma > 0$, definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $\sigma, \delta > 0$ gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)} \varphi_\sigma(\vec{x}) d\vec{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\sigma\to 0+} \lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)\setminus B(0,\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x}) d\vec{x} = 0.$$

(ii) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^3)$ mit $f(\vec{x}) = 0$ falls $\|\vec{x}\| > 1$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{\sigma\to 0+} \int_{B(0,1)} f(\vec{x})\varphi_\sigma(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

(b) Sei $f(x) = \ln(\|\vec{x}\|)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ und $g(x) = \frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial(B(0,2)\setminus B(0,1))} g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}}\, \mathrm{d}s.$$

Dabei bezeichnet $\vec{N}$ stets die *äußere Einheitsnormale* des Gebiets $B(0,2)\setminus B(0,1)$.

Aufgabe 50 (Übung)
Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten:

(a) $\int_A xyz \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1,\, x^2+y^2 \le 1\}$

(b) $\int_B z(x^3+xy^2) \,\mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \le z \le \pi,\, 1 \le x^2+y^2 \le 4,\, \left|\frac{y}{x}\right| \le 1\}$

Aufgabe 51 (Übung)
Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Das Vektorfeld $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+xy \\ x^2y - y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

— Bitte wenden! —

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 52 (Tutorium)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_A (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7}\, \mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2 \leq (1-z)^2\right\}$

(b) $\int_B \sin(z)\, \mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \{x,y,z \geq 0,\ x+y+2z \leq 1\}$

Aufgabe 53 (Tutorium)
Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch $C = [0,1] \times [0,2] \cup [0,2] \times [1,2]$. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_C y^2 - x^2 \mathrm{d}(x,y) \quad \text{und} \quad \int_C e^{x-y} - e^{x+y} \mathrm{d}(x,y)$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 54 (Tutorium)

(a) Bestimmen Sie für $a,b,c > 0$ das Volumen $\mathrm{vol}(E) = \iiint_E \mathrm{d}(x,y,z)$ des *Ellipsoids*

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\right\},$$

(i) mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri (bzw. Integration über projezierbare Teilmengen)

(ii) mit Hilfe der Koordinaten

$$\Phi(r,\theta_1,\theta_2) = r(a\cos(\theta_1)\cos(\theta_2),\ b\sin(\theta_1)\cos(\theta_2),\ c\sin(\theta_2)),$$
$$(r,\theta_1,\theta_2) \in [0,1] \times [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2].$$

(b) Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\| \leqslant 2\}$ ein kugelförmiger Körper mit der Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & ,0 \leqslant \|(x,y,z)\| \leqslant 1, \\ 2 & ,1 < \|(x,y,z)\| \leqslant 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\int_B \rho(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z).$$