Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
28.06.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 55 (Übung)
Sei $B(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 < r^2\}$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $\vec{x}_0$ und Radius $r > 0$. Weiter sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und für $R > 0$ seien zwei Funktionen

$$f \in C^1(\bar{B}(\vec{x}_0, R) \times I) \quad \text{und} \quad r \in C^1((a, b), (0, R))$$

gegeben. Zeigen Sie den *Transportsatz von Reynolds* für Kugeln im $\mathbb{R}^3$, das heißt es gilt

$$\frac{d}{dt} \iiint_{B(\vec{x}_0, r(t))} f \, d\tau \; = \; \iiint_{B(\vec{x}_0, r(t))} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\tau \; + \; r'(t) \iint_{\partial B(\vec{x}_0, r(t))} f \, do$$

für alle $t \in (a, b)$.
Hinweis: Hier bezeichnet $d\tau$ das Volumenintegral und do das Oberflächenintegral bezüglich der Variable $\vec{x}$. Benutzen Sie zunächst für festes $t \in (a, b)$ die Transformationsformel mit der Abbildung $\Phi_t(\vec{x}) = \vec{x}_0 + r(t)\vec{x}$ angewandt auf das Integral

$$\iiint_{B(\vec{x}_0, r(t))} f \, d\tau.$$

Aufgabe 56 (Übung)

(a) Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationstorus'

$$\mathbb{T}_r^R = \{((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi), (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi), r\sin(\vartheta)) : \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)\}.$$

(b) Berechnen Sie die Oberfläche der Sphäre $S_r(\vec{x}_0) = \partial B(\vec{x}_0, r)$ gegeben durch

$$A(S_r(\vec{x}_0)) = \iint_{S_r(\vec{x}_0)} do$$

mit Hilfe des Divergenzsatzes.

Aufgabe 57 (Übung)
Es sei Γ eine positiv orientierte Parameterisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ entsteht. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_\Gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot d\vec{s}$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 58 (Tutorium)
Es sei $\mathcal{F} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+y^2+z^2 = 1, \, z > 0\big\}$ und $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{F}(x,y,z) = (1, xz, xy)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} \cdot \vec{N} \; do$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Aufgabe 59 (Tutorium)
Gegeben sei der Kegel $C = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\Big\}$ und $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z+1)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch den Mantel ∂C in Richtung der äußeren Normale:

$$\iint_{\partial C} \vec{F} \cdot \vec{N} \; do.$$

Aufgabe 60 (Tutorium)
Gegeben sei die Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ der *homogenen Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) - c\Delta u(\vec{x},t) = 0 \qquad \forall \; (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$$

mit Diffusionsgesetz $c > 0$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$E(T) \;\leq\; \frac{c}{2}\int_0^T \iint_{\partial B(0,ct)} |\Delta u|^2 \; do \; dt \;+\; c\int_0^T \iint_{\partial B(0,ct)} \|\nabla u\|^2 \; do \; dt$$

für die *Energie* in $B(0,ct)$ gegeben durch

$$E(t) = \frac{1}{2}\iiint_{B(0,ct)} \|\nabla u\|^2 \; d\tau, \quad t \in (0,T).$$

Hinweis: Benutzen Sie den Transportsatz von Reynolds aus Aufgabe 55 und die Green'schen Formeln aus Abschnitt 21.10 der Vorlesung.

Erinnerung: Die **Übungsklausur** in Höherer Mathematik II für die Fachrichtung Physik findet am Samstag, den **15.07.2017** von 10:00 bis 12:00 im Benz-Hörsaal statt. Studenten, die die Übungsklausur als Studienleistung einbringen können und wollen, müssen sich im Sekretariat bei Frau Dr. Nagato-Plum anmelden. Anderenfalls ist eine Anmeldung nicht erforderlich. Weitere Informationen finden Sie auf der Homepage der Veranstaltung.