Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
30.06.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 55: (Übung)
Sei $B(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 < r^2\}$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt $\vec{x}_0$ und Radius $r > 0$. Weiter sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und für $R > 0$ seien zwei Funktionen

$$f \in C^1(\bar{B}(\vec{x}_0, R) \times I) \quad \text{und} \quad r \in C^1((a, b), (0, R))$$

gegeben. Zeigen Sie den *Transportsatz von Reynolds* für Kugeln im $\mathbb{R}^3$, das heißt es gilt

$$\frac{d}{dt} \iiint_{B(\vec{x}_0, r(t))} f \; d\tau \;=\; \iiint_{B(\vec{x}_0, r(t))} \frac{\partial f}{\partial t} \; d\tau \;+\; r'(t) \iint_{\partial B(\vec{x}_0, r(t))} f \; do$$

für alle $t \in (a, b)$.
Hinweis: Hier bezeichnet $d\tau$ das Volumenintegral und do das Oberflächenintegral bezüglich der Variable $\vec{x}$. Benutzen Sie zunächst für festes $t \in (a, b)$ die Transformationsformel mit der Abbildung $\Phi_t(\vec{x}) = \vec{x}_0 + r(t)\vec{x}$ angewandt auf das Integral

$$\iiint_{B(\vec{x}_0, r(t))} f \; d\tau.$$

Lösungsvorschlag

Sei zunächst $t \in (a, b)$ fest. Wegen $r(t) > 0$ ist die Abbildung $\Phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\Phi_t(\vec{x}) = \vec{x}_0 + r(t)\vec{x}$ bijektiv, stetig differenzierbar mit $\det(\Phi_t'(\vec{x})) = r^3(t) > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist $\Phi_t'(\vec{x})$ regulär für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Ferner ist $\Phi_t(B(\vec{0}, 1)) = B(\vec{x}_0, r(t))$.

Zur Notation bemerken wir, dass wir statt $\iiint d\tau$ die Schreibweise $\int d\vec{x}$ benutzen, um die Variablentransformation darstellen zu können. Nach der Transformationsformel (vgl. Abschnitt 21.3 der Vorlesung) gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{B(\vec{x}_0, r(t))} f(\vec{x}, t) \; d\vec{x} &= \int_{\Phi_t(B(\vec{0},1))} f \; d\vec{x} \\
&= \int_{B(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}), t) \left|\det(\Phi_t'(\vec{y}))\right| \; d\vec{y} \\
&= r^3(t) \int_{B(\vec{0},1)} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y}, t) \; d\vec{y}
\end{aligned}$$

Die Menge $\overline{B}(\vec{0},1)$ ist beschränkt und abgeschlossen, also, nach Vorlesung, kompakt. Ferner ist für jedes $t \in (a,b)$ die Abbildung $\vec{y} \mapsto f(\Phi_t(\vec{y}),t)$ stetig. Nach Abschnitt 19.18 der Vorlesung ist also $\vec{y} \mapsto f(\Phi_t(\vec{y}),t)$ beschränkt auf $\overline{B}(\vec{0},1)$. Deshalb existiert das Integral

$$\int_{B(\vec{0},1)} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y}, t)\ d\vec{y}$$

für jedes $t \in (a,b)$. Die Abbildungen

$$(\vec{y},t) \mapsto \Phi_t(\vec{y}), \quad (\vec{y},t) \mapsto f(\Phi_t(\vec{y}),t)$$

sind stetig differenzierbar für alle $(\vec{y},t) \in D := B(\vec{0},1) \times (a,b)$ und es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(\Phi_t(\vec{y}),t)\right) = \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t)$$

für alle $(\vec{y},t) \in D$. Nach dem Satz über die Differentiation von Parameterintegralen (vgl. Abschnitt 21.11 der Vorlesung), ist die Funktion

$$t \mapsto \int_{B(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) d\vec{y}, \quad t \in (a,b)$$

differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{B(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) d\vec{y}\right) = \int_{B(\vec{0},1)} \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y}\ r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t)\ d\vec{y}$$

für alle $t \in (a,b)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^3(t)\int_{B(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) d\vec{y}\right) &= 3r'(t)r^2(t)\int_{B(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) d\vec{y} \\
&\quad + r^3(t)\int_{B(\vec{0},1)} \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) \cdot \vec{y}\ r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}_0 + r(t)\vec{y},t) d\vec{y} \\
&= 3r'(t)r^{-1}(t)\int_{B(\vec{0},1)} f(\Phi_t(\vec{y}),t) r^3(t)\ d\vec{y} \\
&\quad + \int_{B(\vec{0},1)} \nabla_{\vec{x}} f(\Phi_t(\vec{y}),t) \cdot \frac{\Phi_t(\vec{y}) - \vec{x}_0}{r(t)}\ r'(t)r^3(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\Phi_t(\vec{y}),t) r^3(t)\ d\vec{y} \\
&\overset{\text{TrF}}{=} \int_{B(\vec{x}_0,r(t))} \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x},t)\ d\vec{x} \\
&\quad + r'(t)\int_{B(\vec{x}_0,r(t))} \frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)}\ d\vec{x}
\end{aligned}$$

für alle $t \in (a,b)$. Schließlich gilt

$$\frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) d\vec{x} + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)} = \nabla_{\vec{x}} \cdot \left(f(\vec{x},t)\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)}\right)$$

für alle $(\vec{x},t) \in D$. Nach dem Gauß'schen Divergenzsatz aus Abschnitt 21.10 der Vorlesung gilt deshalb

$$\int_{B(\vec{x}_0,r(t))} \frac{3}{r(t)} f(\vec{x},t) + \nabla_{\vec{x}} f(\vec{x},t) \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)}\ d\vec{x} = \iint_{\partial B(\vec{x}_0,r(t))} f(\vec{x},t)\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{r(t)} \cdot \vec{n}(\vec{x})\ do(\vec{x}) = \iint_{\partial B(\vec{x}_0,r(t))} f\ do$$

für alle $t \in (a,b)$. Dies schließt den Beweis ab.

Aufgabe 56: (Übung)

(a) Es sei $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationstorus'

$$\mathbb{T}_r^R = \{((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi), (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi), r\sin(\vartheta)) : \varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)\}.$$

(b) Berechnen Sie die Oberfläche der Sphäre $S_r(\vec{x}_0) = \partial B(\vec{x}_0, r)$ gegeben durch

$$A(S_r(\vec{x}_0)) = \iint_{S_r(\vec{x}_0)} do$$

mit Hilfe des Divergenzsatzes.

Lösungsvorschlag

(a) Betrachte die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(\varphi, \vartheta) = ((R + r\cos(\vartheta))\cos(\varphi), (R + r\cos(\vartheta))\sin(\varphi), r\sin(\vartheta))$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Wir zeigen: F ist injektiv auf $[0, 2\pi)^2$: Seien dazu $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi)$ mit $F(\varphi_1, \vartheta_1) = F(\varphi_2, \vartheta_2)$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 \ni (F_1(\varphi_1, \vartheta_1), F_2(\varphi_1, \vartheta_1)) &= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_1))}_{>0}(\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1)) \\
&= \underbrace{(R + r\cos(\vartheta_2))}_{>0}(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2)) = (F_1(\varphi_2, \vartheta_2), F_2(\varphi_2, \vartheta_2) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Wegen der Bijektivität der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ gilt $\varphi_1 = \varphi_2$ und $(R + r\cos(\vartheta_2)) = (R + r\cos(\vartheta_2))$. Mit $F_3(\varphi_1, \vartheta_1) = F_3(\varphi_2, \vartheta_2)$, folgt weiter

$$\begin{aligned}
r\cos(\vartheta_1) &= r\cos(\vartheta_2), \\
r\sin(\vartheta_1) &= r\sin(\vartheta_2).
\end{aligned}$$

Wieder folgt mit der Bijektivitat der Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, dass $\vartheta_1 = \vartheta_2$ gilt. Damit hat sich F als injektiv auf $[0, 2\pi)^2$ erwiesen.

Es gilt

$$F'(\varphi, \vartheta) = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi)(R + r\cos(\vartheta)) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 0 & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial \varphi} \times \frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right\| = r(R + r\cos(\vartheta)) > 0.$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ und somit ist F eine reguläre Parametrisierung. Definiere $U = (0, 2\pi)^2$, sowie $N_1 = \{F(\varphi, 0) : \varphi \in (0, 2\pi)\}$, $N_2 = \{F(0, \vartheta) : \vartheta \in (0, 2\pi)\}$ und $N_3 = \{F(0, 0)\}$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
o(N_1) &= \int_{(0,2\pi)\times\{0\}} 1 \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \times \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right\| \, \mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0, \\
o(N_2) &= \int_{\{0\}\times(0,2\pi)} 1 \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \times \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right\| \, \mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0, \\
o(N_3) &= \int_{\{0\}\times\{0\}} 1 \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \times \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right\| \, \mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = 0.
\end{aligned}$$

Also ist $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ eine o-Nullmenge. Es ist ferner $\mathbb{T}_r^R = F(U) \cup N$. Nach Definition folgt:

$$\begin{aligned}
o(\mathbb{T}_r^R) &= \int_{F(U)} do = \int_U \left\| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \times \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right\| \, \mathrm{d}(\varphi, \vartheta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos(\vartheta)) \, \mathrm{d}\vartheta = 4\pi^2 r R.
\end{aligned}$$

(b) Die äußere Einheitsnormale der Sphäre $S_r(\vec{x}_0)$ ist $\vec{N}(\vec{x}) = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{r}$, das heißt $\vec{N}$ eine C^1-Fortsetzung in die offene Kugel $B(\vec{x}_0, r)$. Es gilt $\operatorname{div}(\vec{N}(\vec{x})) = \frac{3}{r}$ für alle $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, r)$ und daher folgt aus dem Divergenzsatz (Abschnitt 21.10 der Vorlesung)

$$A(S_r(\vec{x}_0)) = \iint_{S_r(\vec{x}_0)} do = \iint_{S_r(\vec{x}_0)} \vec{N} \cdot \vec{N} do = \iiint \operatorname{div}(\vec{N}) \, d\tau = \frac{3}{r} \operatorname{vol}(b(\vec{x}_0, r)) = \frac{3}{r} \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^2.$$

Aufgabe 57: (Übung)
Es sei Γ eine positiv orientierte Parameterisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ entsteht. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_\Gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot d\vec{s}$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Lösungsvorschlag

(a) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ von ∂Z ist durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 - \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Entsprechend ist

$$\dot{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Wir berechnen zuerst eine Stammfunktion von $\sin^4$ durch

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(t)\mathrm{d}t &= \int \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)}\underbrace{\sin^3(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int \cos^2(t)\sin^2(t)\mathrm{d}t \\
&= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int (1-\sin^2(t))\sin^2(t)\mathrm{d}t \\
&= -\left[\cos(t)\sin^3(t)\right] + 3\int \sin^2(t))\mathrm{d}t - 3\int \sin^4(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{3}{2}(t-\sin(t)\cos(t)) - \cos(t)\sin^3(t)\right] - 3\int \sin^4(t)\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int \sin^4(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{3}{8}t - \cos(t)\left(\frac{\sin^3(t)}{4} + \frac{3\sin(t)}{8}\right)\right].
\end{aligned}$$

Damit gilt für das gesuchte Integral:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3)\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3(\varphi), \cos^3(\varphi), -(1-\cos(\varphi)-\sin(\varphi))^3)\cdot \\
&\quad (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), \sin(\varphi)-\cos(\varphi))\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi) - (\sin(\varphi)-\cos(\varphi))(1-\cos(\varphi)-\sin(\varphi))^3\ \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sin^4(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi - \frac{1}{4}\left[(1-\cos(\varphi)-\sin(\varphi))^4\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&\overset{\text{siehe oben}}{=} 2\left[\frac{3}{8}\varphi - \cos(\varphi)\left(\frac{\sin^3(\varphi)}{4} + \frac{3\sin(\varphi)}{8}\right)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

(b) Eine reguläre Parameterisierung $\Phi : (0,1)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ der Fläche $M = E \cap Z$ (bis auf die o-Nullmenge $N = \{(x,y,z) \in M : x \geq 0, y = 0\}$) ist durch

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1 - r(\cos(\varphi)+\sin(\varphi)) \end{pmatrix}$$

für alle $r \in (0,1)$ und alle $\varphi \in (0,2\pi)$ gegeben. Wir berechnen vorbereitend das vektorielle Oberflächenelement (vgl. Abschnitt 21.8 des Skriptes)

$$\begin{aligned}
\vec{N}\ do((r,\varphi)) &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)(r,\varphi)\ d(r,\varphi) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi)-\sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r(\sin(\varphi)-\cos(\varphi)) \end{pmatrix} d(r,\varphi) \\
&= r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d(r,\varphi)
\end{aligned}$$

für alle $(r,\varphi) \in (0,1)\times(0,2\pi)$. Als letzte Vorbereitung berechnen wir

$$\nabla \times \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Es folgt mit dem Satz von Stokes (vgl. Abschnitt 21.9 der Vorlesung):

$$\int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot d\vec{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_M \nabla \times \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix} \cdot \vec{N}(\vec{x})\ do(\vec{x}) = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\ \mathrm{d}\varphi\ dr = \frac{3}{2}\pi.$$

Aufgabe 58: (Tutorium)
Es sei $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$ und $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{F}(x, y, z) = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} \cdot \vec{N}\ do$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Lösungsvorschlag

(a) Eine reguläre Parameterisierung $\Phi : (0, 2\pi) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$ (bis auf die o-Nullmenge $N = \{(0, 0, 1)\}$) der Fläche $\mathcal{F}$ ist durch

$$\Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in (0, 2\pi)$ und alle $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gegeben. Wir berechnen vorbereitend das vektorielle Oberflächenelement

$$\begin{aligned} \vec{N}\ do((\varphi, \theta)) &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)(\varphi, \theta)\ d(r, \varphi) \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)) \end{pmatrix}\ d(r, \varphi) \\ &= \cos(\theta)\Phi(\varphi, \theta)\ d(r, \varphi) \end{aligned}$$

für alle $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$. Es gilt mit der Definition des Oberflächenintegrals:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{N}(\vec{x})\ do(\vec{x}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cos(\theta)\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\cos(\varphi) + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos^3(\theta)\sin(\theta)\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\left[-\sin(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \cos^3(\theta)\sin(\theta)\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\ \mathrm{d}\vartheta = 0. \end{aligned}$$

(b) Eine positiv orientierte Parameterisierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ des Randes $\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ ist durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gegeben. Es gilt

$$\dot{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ferner liefert *„scharfes Hinsehen“*, dass für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = (\frac{xz^2}{2}, \frac{x^2 y}{2}, y)$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\nabla \times F = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt. Es folgt mit dem Satz von Stokes (vgl. Abschnitt 21.9 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{N}(\vec{x}) \; do(\vec{x}) &= \int_{\mathcal{F}} (\nabla \times F(\vec{x})) \cdot \vec{N}(\vec{x}) \; do(\vec{x}) \\
&\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\gamma} F(\vec{x}) \cdot d\vec{s} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(0, \frac{\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)}{2}, \sin(\varphi)\right) \cdot (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0) \; \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)}{2} \; \mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{1}{8}\left[\cos^4(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 59: (Tutorium)
Gegeben sei der Kegel $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}$ und $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z+1)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Fluss von $\vec{F}$ durch den Mantel ∂C in Richtung der äußeren Normale:

$$\iint_{\partial C} \vec{F} \cdot \vec{N} \; do.$$

Lösungsvorschlag

Nach dem Gaußschen Divergenzsatz aus der Vorlesung gilt:

$$\int_{\partial C} f \cdot \vec{N} \; do = \int_C (\nabla \cdot f) \, d\tau$$

Es ist

$$(\nabla \cdot f)(\vec{x}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten folgt:

$$\begin{aligned} \int_C (\nabla \cdot f)\,(\vec{x}) &= 3 \int_0^2 \int_0^{2-z} \int_0^{2\pi} \rho \; d\phi \; d\rho \; \mathrm{d}z = 6\pi \int_0^2 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=(2-z)} \mathrm{d}z = 3\pi \int_0^2 (2-z)^2 \mathrm{d}z \\ &= -\pi \left[(2-z)^3\right]_{z=0}^{z=2} = 8\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 60: (Tutorium)

Gegeben sei die Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ der *homogenen Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) - c\Delta u(\vec{x},t) = 0 \quad \forall \; (\vec{x},t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$$

mit Diffusionsgesetz $c > 0$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$E(T) \;\le\; \frac{c}{2} \int_0^T \iint_{\partial B(0,ct)} |\Delta u|^2 \; do \; dt \;+\; c \int_0^T \iint_{\partial B(0,ct)} \|\nabla u\|^2 \; do \; dt$$

für die *Energie* in $B(0,ct)$ gegeben durch

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint_{B(0,ct)} \|\nabla u\|^2 \; d\tau, \quad t \in (0,T).$$

Hinweis: Benutzen Sie den Transportsatz von Reynolds aus Aufgabe 55 und die Green'schen Formeln aus Abschnitt 21.10 der Vorlesung.

Lösungsvorschlag

Wir benutzen den Transportsatz von Reynolds aus Aufgabe 55 angewandt auf die Funktionen

$$f(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\|\nabla u(\vec{x},t)\|^2, \quad (\vec{x},t) \in B(0,T) \times [0,T] \qquad \text{und} \qquad r(s) = cs, \quad s \in [0,T].$$

Damit folgt für alle $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \iiint_{B(0,ct)} \nabla u \cdot \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right)\, d\tau + \frac{c}{2}\iint_{\partial B(0,ct)} \|\nabla u\|^2 \, do.$$

Weiterhin folgt aus den Green'schen Formeln aus Abschnitt 21.10 der Vorlesung die Identität

$$\iint_{\partial B(0,ct)} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}} \frac{\partial u}{\partial t}\, do = \iiint_{B(0,ct)} \nabla u \cdot \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right)\, d\tau + \iiint_{B(0,ct)} (\Delta u) \frac{\partial u}{\partial t}\, d\tau$$

und somit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= -\iiint_{B(0,ct)} (\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t}\, d\tau + \iint_{\partial B(0,ct)} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}\frac{\partial u}{\partial t}\, do + \frac{c}{2}\iint_{\partial B(0,ct)} \|\nabla u\|^2\, do \\
&= -c\iiint_{B(0,ct)} (\Delta u)^2\, d\tau + c\iint_{\partial B(0,ct)} \frac{\partial u}{\partial \vec{N}}(\Delta u)\, do + \frac{c}{2}\iint_{\partial B(0,ct)} \|\nabla u\|^2\, do \\
&\le -c\iiint_{B(0,ct)} (\Delta u)^2\, d\tau + \frac{c}{2}\iint_{\partial B(0,ct)} (\Delta u)^2\, do + c\iint_{\partial B(0,ct)} \|\nabla u\|^2\, do \\
&\le \frac{c}{2}\iint_{\partial B(0,ct)} (\Delta u)^2\, do + c\iint_{\partial B(0,ct)} \|\nabla u\|^2\, do.
\end{aligned}$$

Integration $\int_0^T dt$ über beide Seiten liefert die folgende Abschätzung (da $E(0) = 0$):

$$E(T) = \int_0^T \frac{d}{dt}E(t)\, dt \;\le\; \frac{c}{2}\int_0^T \iint_{\partial B(0,ct)} |\Delta u|^2\, do\, dt \;+\; c\int_0^T \iint_{\partial B(0,ct)} \|\nabla u\|^2\, do\, dt.$$