Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
05.07.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 61 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, das Erfüllen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, relle bzw. komplexe Differenzierbarkeit sowie Holomorphie. Geben Sie, dort wo sie existiert, die Ableitung f' an.

$$\text{(i)}\quad f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z, \qquad \text{(ii)}\quad f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|}\,, & z \neq 0, \\ 0\,, & z = 0. \end{cases}$$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ oder $|f|$ konstant auf $\mathbb{C}$, so ist f konstant auf $\mathbb{C}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass aus $(\mathrm{Re}\, f)' \equiv 0$ bzw. $(\mathrm{Im}\, f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$ folgt, dass $\mathrm{Re}\, f$ bzw. $\mathrm{Im}\, f$ konstant auf $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 62 (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_\gamma |z|^2\,\mathrm{d}z$, $\gamma(t) = (1+\mathrm{i})t$, $t \in [0,1]$

(b) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z}\mathrm{d}z$, $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$,

(c) $\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \cos(t + \cos(t))\mathrm{d}t$ und $\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \sin(t + \cos(t))\mathrm{d}t$.

Aufgabe 63 (Übung)

Berechnen Sie die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor: Für $R > 0$ seien die drei Wege

$$\gamma_{1,R}(t) = t, \qquad \gamma_{2,R}(t) = R + it, \qquad \gamma_{3,R}(t) = t(i+1), \qquad t \in [0, R]$$

gegeben.

(a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z.$$

— **Bitte wenden!** —

(b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen die Konvergenz

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} \mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

(c) Berechnen Sie nun den Wert der Fresnel-Integrale, indem Sie in (a) den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten.

Aufgabe 64 (Tutorium)

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)} \mathrm{d}z$$

mit $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $r > 0$ derart, dass das Integral wohldefiniert ist.

(b) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

(i) $\int_\gamma z \operatorname{Re} z \mathrm{d}z$, wobei γ der Weg von 0 nach $1+i$ auf der Parabel $\{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$ ist,

(ii) $\int_\gamma \overline{z}^2 \mathrm{d}z$, wobei $\gamma(t) = e^{it}\sin(t)$ für $t \in [0, T]$ mit $T > 0$ so, dass $\mathrm{L}(\gamma) = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 65 (Tutorium)

(a) Sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $(\operatorname{Im} f)(z) = \cos(x)\sinh(y)$ für $z = x+iy$ und $f(0) = 0$. Bestimmen Sie $\operatorname{Re} f$.

(b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner gelte

$$\operatorname{Re}(f)^2 = \operatorname{Im}(f).$$

Zeigen Sie, dass f konstant auf G ist.

Aufgabe 66 (Tutorium)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^k}\,\mathrm{d}z$, (ii) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{z^2-\pi^2}\,\mathrm{d}z$ und (iii) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}\,\mathrm{d}z$.