Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
07.07.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 61: (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, das Erfüllen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, relle bzw. komplexe Differenzierbarkeit sowie Holomorphie. Geben Sie, dort wo sie existiert, die Ableitung f' an.

$$\text{(i)}\quad f(z) = z\operatorname{Re} z, \qquad \text{(ii)}\quad f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|}\,, & z \neq 0, \\ 0\,, & z = 0. \end{cases}$$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ oder $|f|$ konstant auf $\mathbb{C}$, so ist f konstant auf $\mathbb{C}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass aus $(\operatorname{Re} f)' \equiv 0$ bzw. $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$ folgt, dass $\operatorname{Re} f$ bzw. $\operatorname{Im} f$ konstant auf $\mathbb{C}$ ist.

Lösungsvorschlag

(a) (i) Hier gilt $f(x + \mathrm{i}y) = (x + \mathrm{i}y)x = x^2 + \mathrm{i}xy$. Es sind

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = x^2 \qquad \text{und} \qquad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = xy$$

stetige Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, womit f stetig auf $\mathbb{C}$ ist. Zudem sind beide Funktionen überall stetig partiell differenzierbar, das heißt $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ ist als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ reell differenzierbar. Wegen

$$u_x(x, y) = 2x, \quad v_y(x, y) = x \qquad \text{und} \qquad u_y(x, y) = 0, \quad -v_x(x, y) = -y$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ sind die CRD nur für $x = y = 0$ erfüllt. Also ist f genau in $z = 0$ komplex differenzierbar und insbesondere nicht holomorph. Es gilt

$$f'(0) = u_x(0, 0) + \mathrm{i}v_x(0, 0) = 0.$$

(ii) Hier gilt

$$f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathrm{i}\frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

für $x + \mathrm{i}y \neq 0$. Es sind

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{und} \qquad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

stetige Funktionen von $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ nach $\mathbb{R}$, das heißt f ist stetig auf $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Da außerdem

$$|f(z) - f(0)| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \to 0 \qquad \text{für } z \to 0,$$

ist f auch stetig im Ursprung und somit stetig auf ganz $\mathbb{C}$. Die Funktionen u und v sind stetig partiell differenzierbar außerhalb des Ursprungs, also ist $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^2$ reell differenzierbar. In $z = 0$ ist dies jedoch falsch, denn der Grenzwert des Terms

$$\frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sign}(x)$$

existiert für $x \to 0$ nicht. Die partiellen Ableitungen in $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \frac{x^3 + 3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & u_y(x,y) &= -\frac{y^3 + 3x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ v_x(x,y) &= \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & v_y(x,y) &= \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Damit die CRD erfüllt sind, muss folglich $x^3 + 3xy^2 = 2x^3$ und $y^3 + 3x^2 y = 2y^3$ gelten, also $x(3y^2 - x^2) = 0 = y(3x^2 - y^2)$.da $z \neq 0$ ist somit $x \neq 0,\ y \neq 0$. $3y^2 = x^2$ und $3x^2 = y^2$ gelten. Insbesondere folgt $x^2 = 9x^2$, also $x = 0$ und daher $z = 0$ liefert. Also sind die CR für $z \neq 0$ nicht erfüllt, womit f nirgends komplex differenzierbar ist.

(b) Wir verwenden die Darstellung $f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ mit $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Da f auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, gelten dort die CRD $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

(1) Ist $\operatorname{Re} f = u$ konstant, so gilt $u_x = 0 = u_y$. Nach den CRD gilt nun auch $v_y = u_x = 0$ und $v_x = -u_y = 0$, das heißt $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$. Damit ist v und folglich auch f konstant. Eine ähnliche Argumentation liefert die Behauptung für konstantes v.

(2) Ist $|f(z)| = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Sei also $|f(z)| = c > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies bedeutet $u^2 + v^2 = c^2$. Partielles Ableiten liefert

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2uu_y + 2vv_y = 0.$$

Aus den CRD folgt, dass

$$uv_y + vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad -uv_x + vv_y = 0.$$

Damit gilt auch

$$uv_y + vv_x - \mathrm{i}uv_x + \mathrm{i}vv_y = uv_y + vv_x - \mathrm{i}(uv_x - vv_y) = 0,$$

und somit $u(v_y - \mathrm{i}v_x) + v(v_x + \mathrm{i}v_y) = 0$, also $(u + \mathrm{i}v)(v_y - \mathrm{i}v_x) = 0$. Da $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt $u + \mathrm{i}v \neq 0$ und somit

$$v_y - \mathrm{i}v_x = 0,$$

womit sich $v_x = v_y = 0$ ergibt. Es folgt $(\operatorname{Im} f)' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$, also v konstant auf $\mathbb{C}$ und die Behauptung folgt mit (1).

Aufgabe 62: (Übung)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_\gamma |z|^2 \,\mathrm{d}z$, $\gamma(t) = (1+\mathrm{i})t$, $t \in [0,1]$

(b) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} \mathrm{d}z$, $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$,

(c) $\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \cos(t + \cos(t))\mathrm{d}t$ und $\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} \sin(t + \cos(t))\mathrm{d}t$.

Lösungsvorschlag

(a) Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = (1 + \mathrm{i})$$

für alle $t \in [0,1]$. Nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals ist folglich

$$\int_\gamma |z|^2 \,\mathrm{d}z = \int_0^1 2t^2 \cdot (1+\mathrm{i})\mathrm{d}t = (1+\mathrm{i})\frac{2}{3}.$$

(b) Es ist

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$. Die obige Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = \infty$. Nach Vorlesung ist die Potenzreihe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Da γ einfach geschlossen und $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 22.6 der Vorlesung)

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} \mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(c) Betrachte

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}\cos(t+\cos(t))\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}\sin(t+\cos(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}(\cos(t+\cos(t)) + \mathrm{i}\sin(t+\cos(t)))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)} e^{\mathrm{i}(t+\cos(t))}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)+\mathrm{i}\cos(t)} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t)} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Definiere $\gamma(t) = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $f(z) = e^{\mathrm{i}z}$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C}$ und γ einfach geschlossen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. Abschnitt 22.6 des Skriptes) ist der Wert des obigen Integrals deswegen

$$\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}} e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Da für $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass $z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$, so muss

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}\cos(t+\cos(t))\mathrm{d}t &= 0 \text{ und} \\
\int_0^{2\pi} e^{-\sin(t)}\sin(t+\cos(t))\mathrm{d}t &= 0
\end{aligned}$$

gelten.

Aufgabe 63: (Übung)

Berechnen Sie die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor: Für $R > 0$ seien die drei Wege

$$\gamma_{1,R}(t) = t, \qquad \gamma_{2,R}(t) = R + it, \qquad \gamma_{3,R}(t) = t(i+1), \qquad t \in [0, R]$$

gegeben.

(a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z.$$

(b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen die Konvergenz

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

(c) Berechnen Sie nun den Wert der Fresnel-Integrale, indem Sie in (a) den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten.

Lösungsvorschlag

(a) Wir bemerken, dass der Weg $\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + (\gamma_{3,R})_-$, definiert durch $(\gamma_{3,R})_-(t) = \gamma_{3,R}(R-t)$ für $0 \leq t \leq R$, den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, R und $(1+\mathrm{i})R$ so durchläuft, dass das Dreieck stets links des Weges liegt. Da $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist, folgern wir aus dem Cauchy'schen Integralsatz

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{3,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{(\gamma_{3,R})_-} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\gamma} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = 0.\end{aligned}$$

Insbesondere folgt die behauptete Gleichung

$$\int_{\gamma_{3,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_{2,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^R \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}t)^2}\,\mathrm{i}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^R \left|\mathrm{e}^{t^2-R^2-2\mathrm{i}tR}\right|\mathrm{d}t = \int_0^R \mathrm{e}^{t^2-R^2}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^R \mathrm{e}^{Rt-R^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{Rt-R^2}}{R}\right]_{t=0}^{R} = \frac{1-\mathrm{e}^{-R^2}}{R} \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty,\end{aligned}$$

wobei wir $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}$ und die Monotonie der reellen Exponentialfunktion benutz haben.

(c) Zuerst bemerken wir, dass

$$\int_{\gamma_{1,R}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Zusammen mit (b) und (a) folgern wir, dass $\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z$ für $R \to \infty$ einen Grenzwert hat, und zwar

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}\mathrm{d}z &= \int_0^R \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t^2}(1+\mathrm{i})\mathrm{d}t \overset{s:=\sqrt{2}t}{=} \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}R} \cos(s^2) - \mathrm{i}\sin(s^2)\mathrm{d}s \quad \to \quad \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \cos(s^2) - \mathrm{i}\sin(s^2)\mathrm{d}s \quad \text{für } R \to \infty.\end{aligned}$$

Der letzte Grenzwert existiert, da wir bereits gesehen haben, dass der Grenzwert des Integrals auf der linken Seite existiert. Zusammen folgt

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-\mathrm{i}).$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil beider Seiten liefert

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Aufgabe 64: (Tutorium)

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\mathrm{d}z$$

mit $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ und $r > 0$ derart, dass das Integral wohldefiniert ist.

(b) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

(i) $\int_\gamma z \operatorname{Re} z \mathrm{d}z$, wobei γ der Weg von 0 nach $1+i$ auf der Parabel $\{\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2\}$ ist,

(ii) $\int_\gamma \overline{z}^2 \mathrm{d}z$, wobei $\gamma(t) = e^{it}\sin(t)$ für $t \in [0, T]$ mit $T > 0$ so, dass $\mathrm{L}(\gamma) = \frac{\pi}{2}$.

Lösungsvorschlag

(a) Der Integrand ist für $z \notin \{\pm\mathrm{i}, -\frac{1}{2}\}$ wohldefiniert und dort auch holomorph, also insbesondere stetig. Damit ist das Integral für $r \notin \{\frac{1}{2}, 1\}$ definiert. Wir betrachten die drei Fälle getrennt.

(1) $\underline{0 < r < \frac{1}{2}}$: Der Integrand ist holomorph auf $K(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ und γ_r verläuft in der Menge $K(0, 1/2)$. Da diese konvex ist, folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz, dass

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\mathrm{d}z = 0, \quad 0 < r < \frac{1}{2}.$$

(2) $\underline{\frac{1}{2} < r < 1}$: Die Funktion

$$f_1(z) := \frac{\sin(\pi z)}{z^2+1}$$

ist holomorph auf $K(0,r)$ und γ_r verläuft innerhalb der Menge $k(0,1)$. Da γ_r einfach geschlossen und positiv orientiert ist, folgt aus der Cauchy'schen Integralformel, dass

$$\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_{\gamma_r} \frac{f_1(z)}{z-(-\frac{1}{2})}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot f_1(\frac{-1}{2}) = -\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}, \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

(3) $\underline{1 < r < \infty}$: Hier müssen wir für den Integranden eine Partialbruchzerlegung vornehmen, um die Cauchy'sche Integralformel verwenden zu können. Gesucht sind Konstanten $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(2z+1)} \overset{!}{=} \frac{A}{z+\mathrm{i}} + \frac{B}{z-\mathrm{i}} + \frac{C}{2z+1}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm\mathrm{i}, -\frac{1}{2}\}.$$

Aus dieser Bedingung folgt

$$1 \overset{!}{=} A(z-\mathrm{i})(2z+1) + B(z+\mathrm{i})(2z+1) + C(z^2+1).$$

Dies gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}, -\frac{1}{2}\}$ und wegen der Stetigkeit der Polynome damit auch für $z \in \{\pm\mathrm{i}, -\frac{1}{2}\}$. Setzen wir diese drei Werte ein, so erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}
1 &\overset{!}{=} \frac{5}{4}C, \\
1 &\overset{!}{=} 2\mathrm{i} \cdot (2\mathrm{i}+1) \cdot B = (-4+2\mathrm{i})B, \\
1 &\overset{!}{=} (-2\mathrm{i}) \cdot (-2\mathrm{i}+1) \cdot A = (-4-2\mathrm{i})A,
\end{aligned}$$

und mit $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ergibt sich $A = -\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\mathrm{i}$, $B = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\mathrm{i}$, sowie $C = \frac{4}{5}$. damit ist

$$f_2(z) := \sin(\pi z),$$

holomorph auf $\mathbb{C}$ ist und für $r > 1$ mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_r} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2+1)(2z+1)} \mathrm{d}z &= \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\mathrm{i}\right) \int_{\gamma_r} \frac{f_2(z)}{z-(-\mathrm{i})} \mathrm{d}z + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\mathrm{i}\right) \int_{\gamma_r} \frac{f_2(z)}{z-\mathrm{i}} \mathrm{d}z \\
&\quad + \frac{2}{5} \int_{\gamma_r} \frac{f_2(z)}{z-(-\frac{1}{2})} \mathrm{d}z \\
&= \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\mathrm{i}\right) \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot f_2(-\mathrm{i}) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\mathrm{i}\right) \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot f_2(\mathrm{i}) \\
&\quad + \frac{2}{5} \cdot 2\pi\mathrm{i} \cdot f_2(-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{2}{5}\pi \sinh(\pi)\mathrm{i} - \frac{4}{5}\pi\mathrm{i} = \frac{2\pi}{5}(\sinh(\pi) - 2) \cdot \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

(b) (i) Sei

$$\gamma(t) = t + \mathrm{i}t^2$$

für $t \in [0,1]$. Dann gilt $\dot{\gamma}(t) = 1 + \mathrm{i}2t$ und aus der Definition des Wegintegrals folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z \operatorname{Re} z \mathrm{d}z &= \int_0^1 \gamma(t) \operatorname{Re}(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 (t^2 + \mathrm{i}t^3)(1 + \mathrm{i}2t) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (t^2 - 2t^4) + \mathrm{i}3t^3 \mathrm{d}t = [\frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5]_{t=0}^1 + \mathrm{i}[\frac{3}{4}t^4]_{t=0}^1 = -\frac{1}{15} + \mathrm{i}\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen zuerst die Länge des Weges. Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \sin(t) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \cos(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$$

und deshalb

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_0^T \left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\right| \mathrm{d}t = T.$$

Sei daher $T = \frac{\pi}{2}$, so folgt für das Integral der Wert

$$\int_\gamma \overline{z}^2 \mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} \sin^2(t) \, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \mathrm{d}t.$$

Eine partieller Integration liefert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \mathrm{d}t = [\sin(t)\cos(t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \mathrm{d}t.$$

Wegen $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ gilt also

$$\int_\gamma \overline{z}^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 65: (Tutorium)

(a) Sei f eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $(\operatorname{Im} f)(z) = \cos(x)\sinh(y)$ für $z = x + iy$ und $f(0) = 0$. Bestimmen Sie $\operatorname{Re} f$.

(b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner gelte

$$\operatorname{Re}(f)^2 = \operatorname{Im}(f).$$

Zeigen Sie, dass f konstant auf G ist.

Lösungsvorschlag

(a) Damit die Funktion f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, muss sie in allen Punkten die CRD erfüllen. Schreiben wir $f = u + \mathrm{i}v$, so muss gelten, dass

$$u_x(x,y) \overset{!}{=} \cos(x)\cosh(y) = v_y(x,y),$$

also $u(x,y) = \sin(x)\cosh(y) + g(y)$ für eine differenzierbare Funktion g. Andererseits muss

$$u_y(x,y) \overset{!}{=} \sin(x)\sinh(y) = -v_x(x,y)$$

erfüllt sein, womit sich $u(x,y) = \sin(x)\cosh(y) + h(x)$ mit einer differenzierbaren Funktion h ergibt. Insgesamt erhalten wir $v(x,y) = \cos(x)\sinh(y) + c$ für eine komplexe Konstante c. Wegen $f(0) = 0$ gilt $c = 0$ und daher

$$(\operatorname{Re} f)(z) = \sin(x)\cosh(y), \quad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}.$$

Mit dem Additionstheorem für die komplexe Sinusfunktion ergibt sich außerdem

$$\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin(x)\cos(\mathrm{i}y) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y).$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus einem Koeffizientenvergleich der Potenzreihenentwicklung von $\cosh(y)$ und $\cos(iy)$, bezw. $\sin(iy)$ und $i\sinh(y)$.

(b) Wir schreiben $\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}y$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sowie $f = u + \mathrm{i}v$ mit $u, v : G \to \mathbb{R}$. Da f holomorph auf G ist, gelten die CRD, das heißt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $x + \mathrm{i}y \in G$. Mit der Voraussetzung folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 2u(z)\frac{\partial u}{\partial x}(z), \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 2u(z)\frac{\partial u}{\partial y}(z), \quad z \in G.$$

Mit den CRD folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(z) &= \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 2u(z)\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -2u(z)\frac{\partial v}{\partial x}(z) = -4u^2(z)\frac{\partial u}{\partial x}(z), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(z) = 2u(z)\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 2u(z)\frac{\partial v}{\partial y}(z) = -4u^2(z)\frac{\partial u}{\partial y}(z) \end{aligned}$$

für alle $z \in G$. Damit ist $\nabla u(z) = 0$ für alle $z \in G$. Da G ein Gebiet ist, ist u konstant auf G. nach Vorlesung ist dann u konstant auf G.

Aufgabe 66: (Tutorium)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^k}\,\mathrm{d}z, \quad \text{(ii)} \quad \int_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{z^2 - \pi^2}\,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \text{(iii)} \quad \int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}\,\mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag

(i): Wir benutzen zunächst die Folgerung 22.8 der Cauchy'schen Integralformel (22.7 in der Vorlesung), wonach für eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ stets gilt

$$f^{(k-1)}(0) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z^k}\,\mathrm{d}z.$$

Für die Exponentialfunktion $f(z) = e^z,\ z \in \mathbb{C}$ folgt damit

$$\int_{\partial D} \frac{e^z}{z^k}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}}_{|z=0} e^z = \frac{2\pi i}{(k-1)!}.$$

(ii): Für das Integral in (ii) bemerken wir

$$\int_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{z^2 - \pi^2}\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)(z+\pi)}\,\mathrm{d}z$$

und definieren $g : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 4\} \backslash \{\pm\pi\} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \frac{\cos(z)}{(z-\pi)(z+\pi)}, \quad |z| \leq 4,\ z \neq \pm\pi.$$

Damit ist g eine holomorphe Abbildung, die auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 4\}$ zwei Pole von jeweils erster Ordung in $z_0 = \pm\pi$ besitzt. Das heißt, wir benutzen den Residuensatz (22.12 in der Vorlesung) und berechnen die Residuen mit Bemerkung 22.13 der Vorlesung durch

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(g,\pi) &= \left.\frac{\cos(z)}{z+\pi}\right|_{z=\pi} = -\frac{1}{2\pi}, \\ \operatorname{res}(g,-\pi) &= \left.\frac{\cos(z)}{z-\pi}\right|_{z=-\pi} = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Aus dem Residuensatz folgt dann schließlich

$$\int_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{z^2-\pi^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,(\operatorname{res}(g,\pi) + \operatorname{res}(g,-\pi)) = 0.$$

(iii): Für das Integral in (iii) definieren wir $h : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}, \quad |z| \leq 2,\ z \neq 1.$$

Damit ist h eine holomorphe Abbildung, die auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$ einen Pol von erster Ordung in $z_0 = 1$ besitzt. Wir benutzen Folgerung 22.8 der Vorlesung und folgern

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+3)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{d}{dz}\left.\frac{e^z}{z+3}\right|_{z=1} = 2\pi i \left.\frac{(z+2)e^z}{(z+3)^2}\right|_{z=1} = \frac{3\pi e}{8} i.$$

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2017s/