Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.,
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
12.07.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 67 (Übung)

Bestimmen Sie die Laurent-Reihen-Entwicklung inklusive Konvergenzgebiet von

(a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ um $z_0 = 1$,

(b) $f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ um $z_0 = -2$,

(c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ um $z_0 = 0, 1, 2$.

Um welche Art von Singularität handelt es sich jeweils bei z_0?

Aufgabe 68 (Übung)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine invertierbare Matrix mit komplexen Einträgen und

$$\Phi(A)(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

die zu A assoziierte Möbiustransformation.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi(A) : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}$ für $c \neq 0$ bzw. $\Phi(A) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für $c = 0$ konform ist.

(b) Seien $A, A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass

$$\Phi(A_1) \circ \Phi(A_2) = \Phi(A_1 A_2) \quad \text{und}$$
$$\Phi(A)^{-1} = \Phi(A)^{-1},$$

das heißt, die Menge der Möbiustransformationen ist eine Gruppe (bezüglich der Komposition).

(c) Zeigen Sie, dass Möbius-Transformationen Kreise und Geraden auf Kreise oder Geraden abbildet.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 69 (Tutorium)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \subset G$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt $f = g$ auf ganz G.

(ii) Es gibt genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k^4}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(iii) Es gibt genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(k) = k^2$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(b) Komplexe Potenzen

(i) Für welche $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt die Gleichung $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \operatorname{Log} zw$? Geben Sie ein Beispiel an, für das $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w \neq \operatorname{Log} zw$.

(ii) Für welche α, β, z gilt die Gleichung $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$?

(iii) Welche Bedingungen müssen an α, β, z gestellt werden, damit $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ gilt? Geben Sie ein Beispiel an, für das $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$.

(iv) Berechnen Sie alle zwölften Wurzeln von 1.

Aufgabe 70 (Tutorium)

(a) Klassifizieren Sie die Polstellen von $f_n(z) = (z^2 + 1)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, und berechnen Sie die Residuen in diesen Punkten.

(b) Berechnen Sie $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\pm} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ für $\gamma_\pm(t) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(c) Berechnen Sie $\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z$ entlang des positiv orientierten Randes der Kreisscheibe um 0 mit Radius 2.

(d) Welches Ergebnis vermuten Sie für das Integral $\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z$ entlang der Kurve parametrisiert durch $\gamma(t) = 2(\cos t \sin t + \mathrm{i} \cos t)$, $t \in [-\pi, \pi]$?

Aufgabe 71 (Tutorium)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha^2 > 0$. Zeigen Sie durch Wahl eines geeigneten Integrationsweges in der komplexen Ebene, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha x + \beta)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Sie dürfen verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.